Produit Scalaire

MatheX

17 juin 2021

Produit scalaire

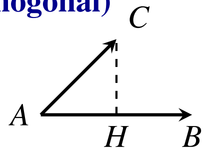
Table des matières :

Produit scalaire

Table des matières :

Produit scalaire

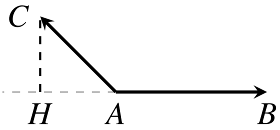
Définition 1 : (Produit scalaire - Projeté orthogonal)



Soit deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

Le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le nombre réel défini par :

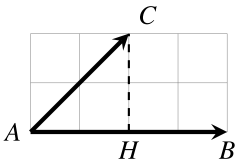
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$



Produit scalaire

Exemple :

Calculez les produits scalaires :



a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

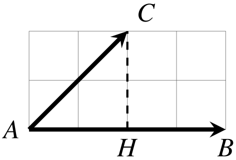
c. $\left(\overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$

Produit scalaire

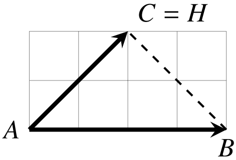
Exemple :

Calculez les produits scalaires :

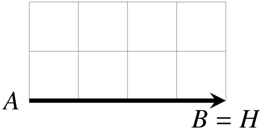
a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 4 \times 2 = 8$



b. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \times AC = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 8$



c. $\left(\overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$



Produit scalaire

Exemple (suite) :

Calculez les produits scalaires :

d. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA}$

e. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

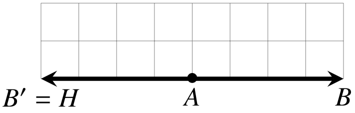
f. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

Produit scalaire

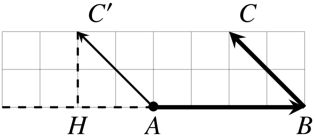
Exemple (suite) :

Calculez les produits scalaires :

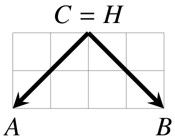
d. $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'} = -AB\times AB = -AB^2$$



e. $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'} = -AB\times AH = -4\times 2 = -8$$



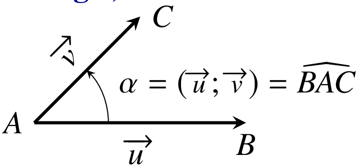
f. $$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CC} = CA\times 0 = 0$$



Produit scalaire

Propriété 1 : (Produit scalaire - Normes et angle)

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.



Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel défini par :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos(\vec{u};\vec{v})}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})}$$

NB : si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Produit scalaire

ABC est un triangle équilatéral
Calculez les produits scalaires :

Exemple :

a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

c. $\left(\overrightarrow{AB}\right)^2$

Produit scalaire

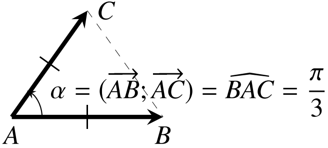
Exemple :

ABC est un triangle équilatéral
Calculez les produits scalaires :

a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\alpha$

$$= AB^2 \times \cos\frac{\pi}{3}$$

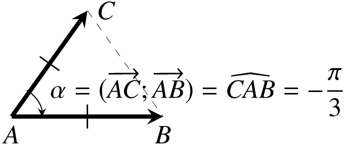
$$= \frac{1}{2}AB^2$$



b. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \times AB \times \cos\alpha$

$$= AB^2 \times \cos -\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2}AB^2$$



c. $\left(\overrightarrow{AB}\right)^2 = AB \times AB \times \cos\alpha$

$$= AB^2 \times \cos 0 = AB^2$$

Produit scalaire

Exemple (suite) :

ABC est un triangle équilatéral
Calculez les produits scalaires :

d. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA}$

e. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

f. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

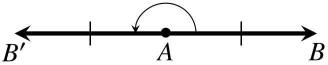
Produit scalaire

Exemple (suite) :

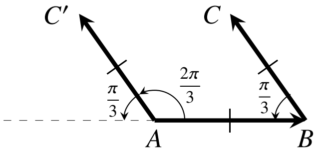
ABC est un triangle équilatéral
Calculez les produits scalaires :

$$d.\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'} = AB^2 \times \cos\pi = -AB^2$$

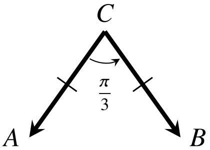
$$\alpha = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB'}) = \widehat{BAB'} = \pi$$



$$e.\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'} = AB^2 \times \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}AB^2$$



$$f.\quad \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = AB^2 \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}AB^2$$



Produit scalaire

Propriété 2 : (Vecteurs colinéaires)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires.

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ de même sens} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ de sens contraire} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = -\left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \qquad (2)$$

Démonstration :

(1) : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de même sens $\Rightarrow \ (\vec{u}, \vec{v}) = 0$

$$\Rightarrow \ cos\,(\vec{u}, \vec{v}) = 1$$

(2) : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de sens contraire $\Rightarrow \ (\vec{u}, \vec{v}) = \pi$

$$\Rightarrow \ cos\,(\vec{u}, \vec{v}) = -1$$

Produit scalaire

Propriété 3 : (Symétrie et bilinéarité)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (1)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad (2)$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \quad (3)$$

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad (4)$$

Produit scalaire

Démonstration :

(1) $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot cos\,(\vec{u}\,;\vec{v}) = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot cos(-(\vec{u}\,;\vec{v}))$$
$$= \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot cos\,(\vec{v}\,;\vec{u}) = \vec{v}\cdot\vec{u} \qquad \square$$

(3) (2) et (1)

(4) $$\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \|\vec{u}\|\cdot\|\lambda\vec{v}\|\cdot cos\,(\vec{u}\,;\lambda\vec{v})$$
$$= \|\vec{u}\|\cdot\lambda\|\vec{v}\|\cdot cos\,(\vec{u}\,;\vec{v}) \qquad \square$$

Produit scalaire

Exemple : *Calculez les produits scalaires :*

a. $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2$

b. $||\vec{u}-\vec{v}||^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2$

c. $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$

Produit scalaire

Exemple :

Calculez les produits scalaires :

$$a.\quad \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2$$
$$= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{u}^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$$
$$= \|\,\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\,\vec{v}\|^2$$

$$\Rightarrow\ \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\,\vec{u}\|^2-\|\,\vec{v}\|^2\right)$$

$$b.\quad \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2$$
$$= (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{u}^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$$
$$= \|\,\vec{u}\|^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\,\vec{v}\|^2$$

$$\Rightarrow\ \vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\,\vec{u}\|^2+\|\,\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

$$c.\quad (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \quad = \quad \vec{u}\cdot\vec{u}+\cancel{\vec{u}\cdot\vec{v}}-\cancel{\vec{v}\cdot\vec{u}}+\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\,\vec{u}\|^2-\|\,\vec{v}\|^2$$

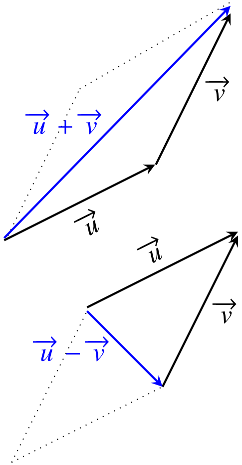
Produit scalaire

Propriété 4 : (Produit scalaire - Normes)

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 \right)$$



Démonstration :

Exemple a. et b. de la propriété 3

Produit scalaire

Exemple :

Soit ABCD un parallélogramme.
Calculez :

a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ *sachant que* $AB = 2$, $BC = 3$ *et AC=4*

b. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ *sachant que* $AB = 2$, $BC = 3$ *et BD=4*

Produit scalaire

Exemple :

Soit ABCD un parallélogramme.
Calculez :

a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ *sachant que* $AB = 2$, $BC = 3$ *et* $AC=4$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2 \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(16 - 4 - 9 \right) = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

b. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ *sachant que* $AB = 2$, $BC = 3$ *et* $BD=4$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} &= \frac{1}{2}\left(AD^2 + AB^2 - \left\|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right\|^2 \right) = \frac{1}{2}\left(AD^2 + BA^2 - \left\|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}\right\|^2 \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(BC^2 + AB^2 - BD^2 \right) = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Produit scalaire

Exemple (suite) :

Soit ABCD un parallélogramme.
Calculez :

c. AC sachant que $AB = 2$, $BC = 3$ et $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{3}$

Produit scalaire

Exemple (suite) :

Soit ABCD un parallélogramme.
Calculez :

c. AC *sachant que* $AB = 2$, $BC = 3$ *et* $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{3}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times cos(\widehat{BAD}) = 2 \times 3 \times cos\,\frac{\pi}{3} = 3 \qquad \text{(Propriété 1)}$$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - AD^2\right) \qquad \text{(Propriété 4)}$$

$$\Rightarrow AC^2 = 2 \times \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + AB^2 + BC^2$$
$$= 2 \times 3 + 4 + 9 = 19$$
$$\Rightarrow AC = \sqrt{19}$$

Produit scalaire

Propriété 5 : (Produit scalaire - Coordonnées)

Dans un repère orthonormé , soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$

Produit scalaire

Démonstration :

Soit le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\cdot\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)=xx'\vec{i}\cdot\vec{i}+xy'\vec{i}\cdot\vec{j}+yx'\vec{j}\cdot\vec{i}+yy'\vec{j}\cdot\vec{j}$$

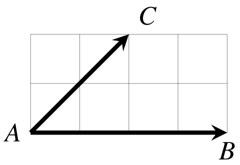
Le repère étant orthonormé $\quad \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=1 \quad$ et $\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=0$

$$\Rightarrow\ \vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy' \qquad \square$$

Produit scalaire

Exemple :

Calculez les produits scalaires :



a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

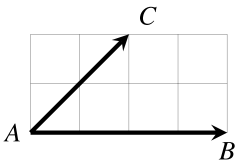
Produit scalaire

Exemple :

Calculez les produits scalaires :

a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$



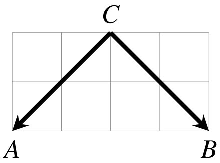
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 2 + 0 \times 2 = 8$

b. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -2 \times (-2) + (-2) \times 2 = 4 - 4 = 0$

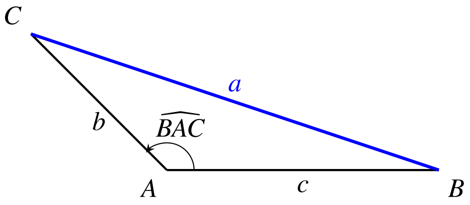


Produit scalaire

Table des matières :

Produit scalaire

Théorème 1 : (Théorème d'Al-Kashi)



Pour tout triangle ABC, on a :

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})}$$

Avec $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et $\hat{A} = \widehat{BAC}$:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}}$$

Produit scalaire

Démonstration :

$$\begin{aligned}
BC^2 &= ||\overrightarrow{BC}||^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\
&= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\
&= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 \\
&= AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times cos(\widehat{BAC}) \qquad \square
\end{aligned}$$

Produit scalaire

Exemple : *Soit un triangle ABC, calculez :*

a. AB *sachant que* $BC = 2$, $AC = \sqrt{3}$ *et* $\widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{6}$

b. AC *sachant que* $AB = \sqrt{2}$, $BC = 3$ *et* $\widehat{CBA} = \dfrac{3\pi}{4}$

Produit scalaire

Exemple : *Soit un triangle ABC, calculez :*

a. AB *sachant que* $BC = 2$, $AC = \sqrt{3}$ *et* $\widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{6}$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \times BC \times AC \times cos(\widehat{ACB})$$
$$= 4 + 3 - 2 \times 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7 - 6 = 1 \Rightarrow AB = 1$$

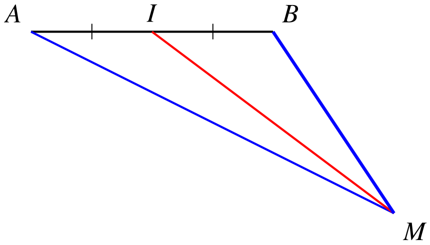
b. AC *sachant que* $AB = \sqrt{2}$, $BC = 3$ *et* $\widehat{CBA} = \dfrac{3\pi}{4}$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times cos(\widehat{CBA})$$
$$= 2 + 9 - 2 \times \sqrt{2} \times 3 \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 + 9 + 6 = 17 \Rightarrow AC = \sqrt{17}$$

Produit scalaire

Théorème 2 : (Théorème de la médiane)

Soit I le milieu de $[AB]$.



Pour tout point M, on a :

$$\boxed{MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \frac{1}{2}\,AB^2}$$

Produit scalaire

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 \\
&= \left(\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2\right) + \left(\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2\right) \\
&= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) \\
&= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right)^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} \\
&= 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 \qquad \square
\end{aligned}
$$

Produit scalaire

Propriété 6 : (Formules de trigonométrie)

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \tag{1}$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \tag{2}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \tag{3}$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \tag{4}$$

Produit scalaire

Démonstration de $\cos(a-b)$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\\
\text{Or}\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} &= OA\times OB\times\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})\\
&= 1\times 1\times\cos(b-a)\\
&= \cos(a-b)
\end{aligned}$$

Donc $\qquad \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \qquad \square$

Produit scalaire

Table des matières :

Produit scalaire

Définition 2 : (Vecteurs orthogonaux)

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff$ $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

On note : $\vec{u} \perp \vec{v}$

Produit scalaire

Exemple : *Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs orthogonaux non nuls.*
Que peut on déduire en utilisant :

a. *la définition 1 (projeté) :*

b. *la propriété 1 (angle) :*

c. *la propriété 4 (normes) :*

d. *la propriété 5 (coordonnées) :*

Produit scalaire

Exemple : *Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs orthogonaux non nuls. Que peut on déduire en utilisant :*

a. la définition 1 (projeté) :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff AB \times AH = 0 \iff AH = 0 \iff$ le projeté de C sur AB est A

b. la propriété 1 (angle) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff AB \times AC \times cos(\widehat{BAC}) = 0 \iff cos(\widehat{BAC}) = 0$$

c. la propriété 4 (normes) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff ||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AC}||^2 - (||\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}||)^2 = 0 \iff BC^2 = AB^2 + AC^2$$

d. la propriété 5 (coordonnées) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff (x_B - x_A)(x_C - x_A) + (y_B - y_A)(y_C - y_A) = 0$$

Produit scalaire

Propriété 7 : (Orthogonalité et perpendicularité)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Longleftrightarrow$ $\boxed{(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi}$ ou $\boxed{(\vec{u};\vec{v}) = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi}$

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ droites perpendiculaires $\Longleftrightarrow$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ orthogonaux

Produit scalaire

Exemple : *Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation réduite :* $y = 2x + 1$
et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation cartésienne : $x + 2y - 2 = 0$

a. *Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$:*

b. *Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$:*

c. *Démontrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires :*

Produit scalaire

Exemple : *Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation réduite :* $y = 2x + 1$
et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation cartésienne : $x + 2y - 2 = 0$

a. *Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$:* $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Voir cours de 2nd : Droites et Systèmes

b. *Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$:* $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

Voir cours de 2nd : Droites et Systèmes

c. *Démontrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires :*

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times(-2) + 2\times 1 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{u}\perp\vec{v} \;\Rightarrow\; \mathcal{D}\perp\mathcal{D}'$$

Produit scalaire

Définition 3 : (Vecteur normal)

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul.

$\vec{n}$ vecteur normal à $\mathcal{D}$ $\iff$ $\vec{n}$ $\perp$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$

Produit scalaire

Exemple : *Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne :* $x + y + 1 = 0$

a. *Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$:*

b. *Donner un vecteur normal à $\mathcal{D}$:*

c. *Déterminer les vecteurs normaux à $\mathcal{D}$:*

Produit scalaire

Exemple : *Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne :* $x + y + 1 = 0$

a. Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$: $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Voir cours de 2nd : Droites et Systèmes

b. Donner un vecteur normal à $\mathcal{D}$:

Soit $\vec{v}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et de coordonnées : $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\ \vec{u}\cdot\vec{v} = -x' + y' = 0\ \Rightarrow\ x' = y'\ \Rightarrow\ \vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ normal à $\mathcal{D}$

c. Déterminer les vecteurs normaux à $\mathcal{D}$:

$\vec{w}$ normal à $\mathcal{D}$ $\Rightarrow$ $\vec{w}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Rightarrow$ $\vec{w} = \lambda\vec{v}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\vec{w}\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\end{pmatrix}$

Produit scalaire

Propriété 8 : (Vecteur normal et équation de droite)

Soit une droite $\mathcal{D}$ et deux réels a et b non nuls simultanément.

$\mathcal{D}$ d'équation : $\boxed{ax + by + c = 0}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$

Produit scalaire

Exemple : *Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ sachant que :*

i) le point $A\,(\,1\,;\,2\,) \in \mathcal{D}$

ii) le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ *est normal à* $\mathcal{D}$

Produit scalaire

Exemple : *Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ sachant que :*

i) le point $A\,(\,1\,;\,2\,) \in \mathcal{D}$

ii) le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ *est normal à* $\mathcal{D}$

$ii) \;\Rightarrow\; x + 2y + c = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ $\quad(1)$

$i)$ *et* $(1) \;\Rightarrow\; 1 + 2 \times 2 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -5 \quad (2)$

(1) *et* $(2) \;\Rightarrow\; x + 2y - 5 = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{D}$

Produit scalaire

Démonstration :

$\Rightarrow$:

Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$ (1)

Soit un vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (2)

$$(1) \Rightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } \mathcal{D} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = -ba + ab = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{n} \text{ normal à } \mathcal{D} \qquad \square$$

$\Leftarrow$:

Soit un vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ normal à une droite $\mathcal{D}$

Soit un point $A\,(x_A\,;\,y_A) \in \mathcal{D}$

Pour tout point $M\,(x\,;\,y) \in \mathcal{D}$:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + (-ax_A - by_A) = 0$$

$$\Rightarrow ax + by + c = 0 \text{ avec } c = -ax_A - by_A \qquad \square$$

Produit scalaire

Propriété 9 : (Équation de cercle)

$\mathcal{C}$ cercle de diamètre $[AB]$ $\iff$ $\mathcal{C}$ ensemble des points M tel que : $\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0}$

$\mathcal{C}$ cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$ et de rayon r $\iff$ $\mathcal{C}$ d'équation : $\boxed{(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2}$

Produit scalaire

Exemple : *Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$:*

a. *de diamètre* $[AB]$ *avec* $A\,(\,0\,;\,1\,)$ *et* $B\,(\,2\,;\,3\,)$ *:*

b. *de centre* $\Omega\,(\,1\,;\,2\,)$ *et de rayon* $\sqrt{2}$ *:*

Produit scalaire

Exemple :

Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$:

a. *de diamètre* $[AB]$ *avec* $A\,(\,0\,;\,1\,)$ *et* $B\,(\,2\,;\,3\,)$ *:*

Pour tout point $M\,(\,x\,;\,y\,) \in \mathcal{C}$:

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff (x-0)(x-2)+(y-1)(y-3) = 0 \iff x^2 - 2x + y^2 - 4y + 3 = 0$
$\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$

b. *de centre* $\Omega\,(\,1\,;\,2\,)$ *et de rayon* $\sqrt{2}$ *:*

Pour tout point $M\,(\,x\,;\,y\,) \in \mathcal{C}$:

$(x-1)^2 = (y-2)^2 = 2$

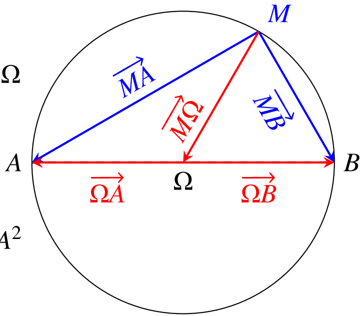
Produit scalaire

Démonstration :

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$ et de centre Ω

Pour tout point M du plan :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A})\cdot(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega B})\\ &= M\Omega^2 + \cancel{\overrightarrow{M\Omega}\cdot\overrightarrow{\Omega B}} - \cancel{\overrightarrow{M\Omega}\cdot\overrightarrow{\Omega B}} - \Omega A^2\\ &= M\Omega^2 - \Omega A^2\end{aligned}$$



Donc pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \iff M\Omega = \Omega A \iff M \in \mathcal{C}$$