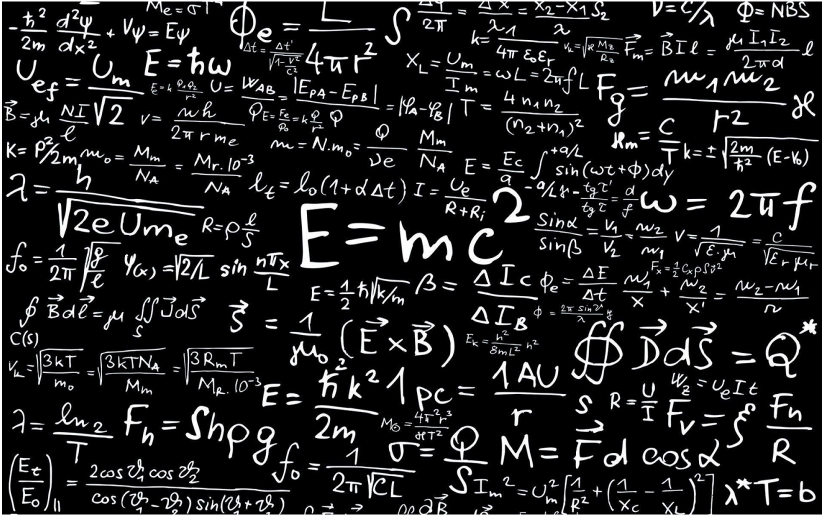
Calcul Littéral

MatheX

14 novembre 2020


E=mc²
ω = 2πf
E=ħω
Φ= NBS
λ*T=b
1 AU

1. Équation

Définition 1 : (équation/résolution)

Une équation est une égalité avec des inconnus représentées par des lettres.

Résoudre une équation, c'est trouver ses solutions, c'est à dire les valeurs des inconnues pour lesquelles l'égalité est vraie .

Exemple :

Vérifiez si les formes ci-dessous sont des équations (justifiez) :

a. $2 + 3$

b. $2 + 3 = 5$

c. $x + 1$

d. $y = 7 + 3y$

Trouvez des solutions des équations ci-dessous :

a. $x + 1 = 2$

b. $x^2 = -1$

c. $x = x$

Une équation peut avoir ....

Exemple :

Vérifiez si les formes ci-dessous sont des équations (justifiez) :

a.	$2+3$	NON : pas d'égalité, pas d'inconnu
b.	$2+3=5$	NON : pas d'inconnu
c.	$x+1$	NON : pas d'égalité
d.	$y=7+3y$	OUI : égalité + inconnus (x et y)

Trouvez des solutions des équations ci-dessous :

a.	$x+1=2$	$S=\{1\}$
b.	$x^2=-1$	$S=\{\ \}=\emptyset$
c.	$x=x$	$S=\mathbb{R}$

Une équation peut avoir .... zéro, une ou plusieurs solutions

Propriété 1 : (opération sur les équations)

Les solutions d'une équation ne sont pas modifiées lorsqu'on :

- additionne (ou soustrait) chaque membre de l'égalité par un même nombre
- multiplie (ou divise) chaque membre de l'égalité par un même nombre différent de zéro

Exemple :

Résoudre les équations ci-dessous :

a. $x + 2 = 3$

b. $3x + 1 = x + 2$

c. $ax + b = cx + d$

Exemple :

Résoudre les équations ci-dessous :

a. $x+2=3 \quad \Leftrightarrow \quad x+2-2=3-2 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$

b. $3x+1=x+2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+1-1=x+2-1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x=x+1$

$\Leftrightarrow \quad 3x-x=x+1-x \quad \Leftrightarrow \quad 2x=1$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{2x}{2}=\dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{1}{2}$

c. $ax+b=cx+d \quad \Leftrightarrow \quad (a-c)x=d-b \quad (1)$

- $si \quad a-c\neq 0 \ : \quad (1)\Leftrightarrow x=\dfrac{d-b}{a-c}$
- $si \quad a-c=0 \ : \quad (1)\Leftrightarrow 0=d-b \quad (2)$
  - $si \quad d-b=0 \ : \quad (2)\Leftrightarrow 0=0 \Rightarrow S=\mathbb{R}$
  - $si \quad d-b\neq 0 \ : \quad (2)\Leftrightarrow 0=d-b\neq 0 \Rightarrow S=\emptyset$

Propriété 2 : (équation produit, équation quotient)

Un produit est nul $\Longleftrightarrow$ Au moins un facteur est nul

Un quotient est nul $\Longleftrightarrow$ Le numérateur est nul **et** le dénominateur est non nul

Exemple :

Résoudre les équations ci-dessous :

a. $(x-1)\times(x-2)=0$

b. $$\frac{(3x+6)(2x-2)}{x^2+1}=0 \qquad (1)$$

c. $$\frac{(3x+6)(2x-2)}{x^2-1}=0 \qquad (2)$$

Exemple :

Résoudre les équations ci-dessous :

a. $(x-1)\times(x-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x-1=0 \quad ou \quad x-2=0$

$\Leftrightarrow \quad x=1 \quad ou \quad x=2 \quad \Rightarrow \quad S=\{\,1\,;\,2\,\}$

b. $\dfrac{(3x+6)(2x-2)}{x^2+1}=0 \qquad (1)$

$x^2+1\neq 0$ pour tout x , donc :

$(1) \quad \Leftrightarrow \quad (3x+6)(2x-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+6=0 \quad ou \quad 2x-2=0$

$\Rightarrow \quad S=\{\,-2\,;\,1\,\}$

c. $\dfrac{(3x+6)(2x-2)}{x^2-1}=0 \qquad (2)$

$x^2-1=(x-1)(x+1)\neq 0$ pour tout $x\neq 1$ et $x\neq -1$, donc :

$(2) \quad \Leftrightarrow \quad x=-2 \quad \Rightarrow \quad S=\{\,-2\,\}$

Propriété 3 : (développer/factoriser/identité remarquable)

développement

$\longrightarrow$

$$k(a+b) = ka + kb \qquad \text{(simple distributivité 1)}$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \qquad \text{(double distributivité)}$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad \text{(identité 1)}$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \qquad \text{(identité 2)}$$

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2} \qquad \text{(identité 3)}$$

$\longleftarrow$

factorisation

Exemple :

Résoudre les équations ci-dessous :

a. $x^2 + 2x = 0$

b. $x^2 + 2x + x + 2 = 0$

c. $x^2 + 2x + 1 = 0$

d. $x^2 - 8x + 16 = 0$

e. $x^2 - 16 = 0$

f. $(100x + 1000)^2 - (99x + 999)^2 = 0$

Exemple :

Résoudre les équations ci-dessous :

a. $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2$

b. $x^2 + 2x + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -2$

c. $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

d. $x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

e. $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 4$

f. $(100x + 1000)^2 - (99x + 999)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \Big((100x + 1000) + (99x + 999)\Big)\Big((100x + 1000) - (99x + 999)\Big) = 0$$

$$\Leftrightarrow (199x + 1999)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1999}{199} \text{ ou } x = -1$$

2. Inéquation

Définition 2 : (inéquation/résolution)

Une inéquation est une inégalité avec des inconnues représentées par des lettres.

Résoudre une inéquation, c'est trouver ses solutions, c'est à dire les valeurs des inconnues pour lesquelles l'inégalité est vraie .

Exemple :

Vérifiez si les formes ci-dessous sont des inéquations (justifiez) :

a. $x - 1$

b. $x - 1 = 2$

c. $2 - 1 < 5$

d. $x - 1 > 2$

Déterminez si les nombre listés sont solutions des inéquations :

a. $x + 1 \leq 2$	$x = -2$:	$x = 1$:	$x = 2$:
b. $x + 1 \geq 2x + 3$	$x = -2$:	$x = 1$:	$x = 2$:
c. $x^2 < 1$	$x = -2$:	$x = 1$:	$x = 2$:
d. $x^2 \geq 0$	$x = -2$:	$x = 1$:	$x = 2$:

Exemple :

Vérifiez si les formes ci-dessous sont des inéquations (justifiez) :

a. $x - 1$ NON : pas d'inégalité

b. $x - 1 = 2$ NON : pas d'inégalité

c. $2 - 1 < 5$ NON : pas d'inconnu

d. $x - 1 > 2$ OUI : égalité + inconnu

Déterminez si les nombre listés sont solutions des inéquations :

a. $x + 1 \leq 2$ $x = -2$: Oui $x = 1$: Oui $x = 2$: Non

b. $x + 1 \geq 2x + 3$ $x = -2$: Oui $x = 1$: Non $x = 2$: Non

c. $x^2 < 1$ $x = -2$: Non $x = 1$: Non $x = 2$: Non

d. $x^2 \geq 0$ $x = -2$: Oui $x = 1$: Oui $x = 2$: Oui

Propriété 4 : (opération sur les inéquations)

Les solutions d'une inéquation ne sont pas modifiées lorsqu'on :

- additionne (ou soustrait) chaque membre de l'inégalité par un même nombre
- multiplie (ou divise) chaque membre de l'inégalité par un même nombre différent de zéro et :
  - positif sans changer le sens de l'inégalité
  - négatif en changeant le sens de l'inégalité

Exemple :

Résoudre les inéquations ci-dessous :

a. $x - 1 \geq 0$

b. $x + 1 \geq 0$

c. $-x + 1 \geq 0$

d. $3x + 1 < x + 2$

Exemple :

Résoudre les inéquations ci-dessous :

a. $x-1\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x-1+1\geq 0+1 \quad\Leftrightarrow\quad x\geq 1 \quad\Leftrightarrow\quad x\in[\,1\,;\,+\infty\,[$

$\Rightarrow\ S=[\,1\,;\,+\infty\,[$

b. $x+1\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x+1-1\geq 0-1 \quad\Leftrightarrow\quad x\geq -1 \quad\Leftrightarrow\quad x\in[\,-1\,;\,+\infty\,[$

$\Rightarrow\ S=[\,-1\,;\,+\infty\,[$

c. $-x+1\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad -x+1+x\geq 0+x \quad\Leftrightarrow\quad x\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad x\in]-\infty\,;\,1\,]$

$\Rightarrow\ S=]-\infty\,;\,1\,]$

d. $3x+1<x+2 \quad\Leftrightarrow\quad 3x+1-1<x+2-1 \quad\Leftrightarrow\quad 3x<x+1$

$\Leftrightarrow\quad 3x-x<x+1-x \quad\Leftrightarrow\quad 2x<1 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{2x}{2}<\dfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x<\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\ S=]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\,]$

Exemple :

Résoudre les inéquations ci-dessous :

e. $ax + b \geq 0$

Exemple :

Résoudre les inéquations ci-dessous :

e. $ax + b \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\,x \geq -b \quad (1)$

- *si* $a > 0$: $(1) \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad S = \left[-\dfrac{b}{a}\,;\,+\infty \right[$
- *si* $a < 0$: $(1) \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad S = \left] -\infty\,;\,-\dfrac{b}{a} \right]$
- *si* $a = 0$: $(1) \Leftrightarrow 0 \geq -b \Leftrightarrow b \geq 0 \quad (2)$
  - *si* $b \geq 0$: $(2) \quad \Rightarrow \quad S = \mathbb{R}$
  - *si* $b < 0$: $(2) \quad \Rightarrow \quad S = \emptyset$

Méthode 1 : (tableau de signes)

On peut résoudre une inéquation produit ou quotient à l'aide d'un tableau de signes en procédant comme suit :

1. Identifier la (ou les) valeur qui annule chaque facteur de l'expression (les zéros) ("0" sur le tableau)
2. Pour chaque facteur, renseigner son signe sur une ligne du tableau ("+" ou "-" sur le tableau)
3. Déduire le signe de l'expression en appliquant la règle des signes sur la dernière ligne du tableau
   - les zéros du numérateur sont des zéros pour l'expression ("0" sur le tableau)
   - les zéros du dénominateur sont des valeurs interdites pour l'expression ("||" sur le tableau)

Exemple : *Étudiez le signe des expressions ci-dessous :*

a. $A(x) = (x - 1)(x - 2)$

Exemple : *Étudiez le signe des expressions ci-dessous :*

a. $A(x) = (x-1)(x-2)$

$x - 1 = 0 \iff x = 1$ $\qquad$ $x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$

$x - 2 = 0 \iff x = 2$ $\qquad$ $x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$A(x) = (x-1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$(x-1)(x-2) \leq 0 \iff 1 < x < 2 \iff x \in [\,1\,;\,2\,] \Rightarrow S = [\,1\,;\,2\,]$

$(x-1)(x-2) > 0 \iff x < 1 \text{ ou } x > 2 \iff x \in]-\infty\,;\,1\,[\,\cup\,]\,2\,;\,+\infty\,[$

$\Rightarrow S =]-\infty\,;\,1\,[\,\cup\,]\,2\,;\,+\infty\,[$

Exemple : *Étudiez le signe des expressions ci-dessous :*

b. $B(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

c. $C(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2}$

Exemple : *Étudiez le signe des expressions ci-dessous :*

b. $B(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

c. $C(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2}$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$C(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	