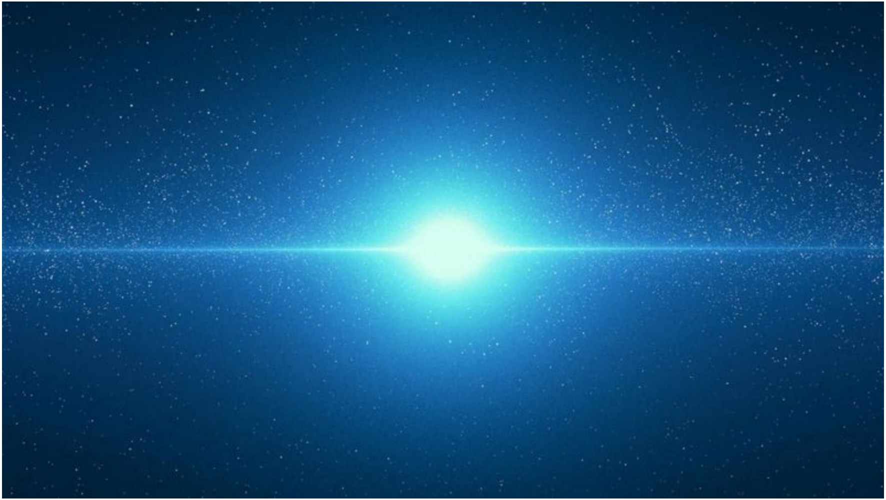
Continuité et Convexité

MatheX

1er novembre 2022



Continuité et Convexité

Table des matières :

Continuité et Convexité

Table des matières :

Continuité et Convexité

Définition 1 : (continuité)

Soit f une fonction définie sur I et a un réel de I

f est continue en a $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = f(a)}$

f est continue sur I $\Longleftrightarrow$ pour tout réel $a \in I$,
f continue en a

Continuité et Convexité

Exemple : *Étudier la continuité de :*

a. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en 0

b. $f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$

Continuité et Convexité

Exemple : *Étudier la continuité de :*

a. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en 0

f n'est pas définie en 0 donc non continue 0

b. $f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -1 \neq f(0) = 1 \implies f \text{ n'est pas continue en } 0$$

Continuité et Convexité

Propriété 1 : (opérations sur fonctions continues)

f et g continues sur I	$\Longrightarrow$	$f+g$ continue sur I
f et g continues sur I	$\Longrightarrow$	$f\times g$ continue sur I
f continue sur I et et λ un réel	$\Longrightarrow$	λf continue sur I
g continue sur I et g ne s'annule pas sur I	$\Longrightarrow$	$\dfrac{1}{g}$ continue sur I
f et g continues sur I et g ne s'annule pas sur I	$\Longrightarrow$	$\dfrac{f}{g}$ continue sur I
g continue sur I et f continue sur l'image de I par g	$\Longrightarrow$	$f\circ g$ continue sur I

Continuité et Convexité

Propriété 2 : (dérivabilité et continuité)

$$f \ \text{dérivable} \ \text{sur } I \quad \Longrightarrow \quad f \ \text{continue} \ \text{sur } I$$

Continuité et Convexité

Propriété 3 : (limite de l'image d'une suite)

Soit f une fonction continue sur I.
Soit (u_n) une suite qui prend ses valeurs sur I.
Soit (v_n) la suite définie pour tout n par $v_n = f(u_n)$

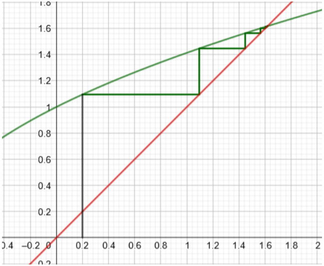
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ f \text{ continue sur } I\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(\ell)$$

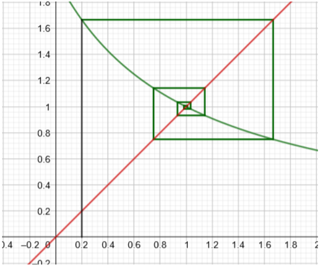
Continuité et Convexité

Théorème 1 : (théorème du point fixe)

Soit f une fonction continue sur I et dont les images sont dans I.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$

$$\left.\begin{array}{r} u_n \text{ convergente vers } \ell \\ \\ f \text{ continue sur } I \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\ell = f(\ell)}$$





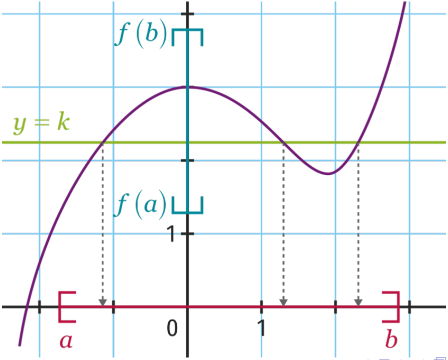
Continuité et Convexité

Table des matières :

Continuité et Convexité

Théorème 2 : (théorème des valeurs intermédiaires)

f continue sur $[a;b]$ $\Longrightarrow$ pour tout réel $k \in [f(a);f(b)]$, $\boxed{f(x) = k}$ a **au moins une solution**



Continuité et Convexité

Corollaire 1 : (théorème des valeurs intermédiaires)

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue sur } [a;b] \\ f \text{ strictement monotone} \\ \text{sur } [a;b] \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{pour tout réel } k \in [f(a);f(b)],\ \boxed{f(x)=k} \text{ a une unique solution sur } [a;b]$$

x	a		c		b
f	$f(a)$	$\nearrow$	k	$\nearrow$	$f(b)$

x	a		c		b
f	$f(a)$	$\searrow$	k	$\searrow$	$f(b)$

<u>NB</u> : Si en plus $0 \in [f(a);f(b)]$ alors f a une unique racine sur $[a;b]$

Continuité et Convexité

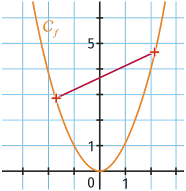
Table des matières :

Continuité et Convexité

Définition 2 : (fonctions convexes et concaves)

Soit f une fonction définie sur I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

f **convexe** sur I $\iff$ pour tous points distincts A et B de $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $[AB]$



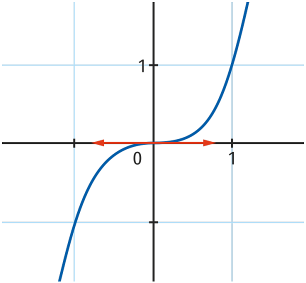
f **concave** sur I $\iff$ pour tous points distincts A et B de $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $[AB]$

Continuité et Convexité

Définition 3 : (point d'inflexion)

Soit f une fonction définie et dérivable sur I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et A un point de $\mathscr{C}_f$

A est un point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en A



Continuité et Convexité

Propriété 4 : (convexité et dérivées)

Soit f une fonction définie et deux fois dérivables sur I.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

$$\begin{aligned} f \text{ convexe sur } I &\iff f' \text{ croissante sur } I \\ &\iff f'' \text{ positive sur } I \\ &\iff \mathscr{C}_f \text{ au-dessus de ses tangentes} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \text{ concave sur } I &\iff f' \text{ décroissante sur } I \\ &\iff f'' \text{ négative sur } I \\ &\iff \mathscr{C}_f \text{ en dessous de ses tangentes} \end{aligned}$$

Continuité et Convexité

Démonstration : $\quad f''$ *positive* $\implies \mathscr{C}_f$ *au-dessus de ses tangentes*

On suppose que $f'' \geq 0$ et on étudie la position relative entre $\mathscr{C}_f$ et ses tangentes.

L'équation d'une tangente en $A\ (a;f(a))$ est : $\quad T_A : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

On va donc étudier le signe de : $\varphi(x) = f(x) - \big(f'(a)(x-a) + f(a)\big)$

$\varphi'(x) = f'(x) - f'(a) \ \Rightarrow\ \varphi''(x) = f''(x) \geq 0 \ \Rightarrow\ \varphi'$ est croissante

<u>cas $x \geq a$</u> :
$x \geq a$ et φ' croissante $\ \Rightarrow\ \varphi'(x) \geq \varphi'(a) = 0 \ \Rightarrow\ \varphi$ croissante
$x \geq a$ et φ croissante $\ \Rightarrow\ \varphi(x) \geq \varphi(a) = 0 \ \Rightarrow\ \mathscr{C}_f$ au-dessus de ses tangentes

<u>cas $x \leq a$</u> :
$x \leq a$ et φ' croissante $\ \Rightarrow\ \varphi'(x) \leq \varphi'(a) = 0 \ \Rightarrow\ \varphi$ décroissante
$x \leq a$ et φ décroissante $\ \Rightarrow\ \varphi(x) \geq \varphi(a) = 0 \ \Rightarrow\ \mathscr{C}_f$ au-dessus de ses tangentes

Continuité et Convexité

Propriété 5 : (Point d'inflexion et dérivée)

Soit f une fonction définie et deux fois dérivables sur I.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et A un point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a

$$A \text{ point d'inflexion de } \mathscr{C}_f \iff f'' \text{ s'annule et change de signe en } a$$