

Évaluation 04

suites, fonctions, continuité

Durée de l'épreuve : **01h00**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.

D'après Bac, Polynésie, 2022.

Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k .

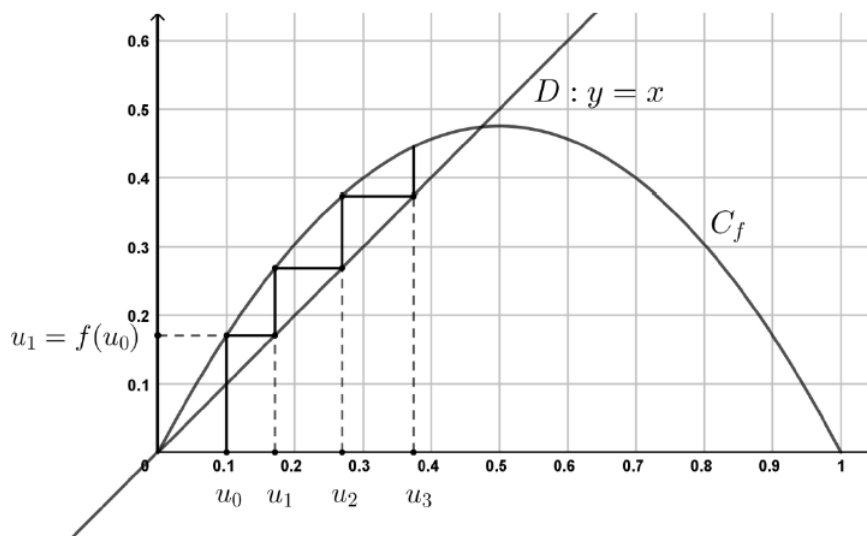
Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,9u_n(1 - u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.
 - a. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 1]$.
 - b. En déduire que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$.
 - c. Déterminer le nombre de solutions sur $[0; 1]$ de l'équation $f(x) = a$ avec a un nombre réel.
2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.

Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. a. En utilisant les résultats de la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

- b. En déduire que la suite (u_n) converge.
c. Déterminer sa limite.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On considère la fonction Python `algo(p)`, avec p un entier naturel non nul, qui renvoie l'indice du premier terme de la suite (u_n) inférieur ou égal à 10^{-p} .
 - a. Implémenter la fonction `algo(p)`.
 - b. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul p , la boucle `while` ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

<p>- <i>Je suis trop fort en Maths</i> - Prouve le! - <i>Donne moi un calcul</i> - 746×607? - <i>ça fait 42 552</i> - Mais c'est faux! - <i>Oui, mais c'était rapide!</i></p>

Exercice bonus (optionnel) Démontrer la formule de la dérivée d'une fonction Composée.