MatheX – 1_SPE MATHS	Le 09 mai 2022
Devoir Commun S2 : 2nd degré - Suite - Dérivation - Application de la dérivation - Produit Scalaire - Exponentielle	Durée: 01h55

Calculatrice en mode examen autorisée.
Le candidat traite **4 exercices de son choix** parmi les 5 exercices du sujet.
Réponses sur feuilles doubles numérotées, chaque exercice sur une nouvelle feuille.
Le candidat indique son nom et celui de son professeur sur chaque feuille.

Exercice 1 : (5 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + 2}$

On note f' sa fonction dérivée et C_f sa courbe représentative dans un repère donné.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{(x + 2)^2}$

2. a. Étudier le signe de l'expression $N(x) = x^2 + 4x + 2$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau des variations de f.

3. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $x = 0$.

4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre C_f et l'axe des abscisses.

5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre C_f et l'axe des ordonnées.

Exercice 2 : (5 points)

Aujourd'hui les chardons (une plante vivace) ont envahi 300 m² des champs d'une région. Chaque semaine, la surface envahie augmente de 5 % par le développement des racines, auquel s'ajoutent 15 m² suite à la dissémination des graines.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la surface envahie par les chardons, en m², après n semaines ; on a donc $u_0 = 300$ m².

1. a. Calculer u_1 et u_2.

b. Montrer que la suite (u_n) ainsi définie, n'est ni arithmétique ni géométrique.

On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 15$.

2. On considère la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n + 300$.

a. Calculer v_0, puis montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}05$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que $u_n = 600 \times 1{,}05^n - 300$.

3. Est-il correct d'affirmer que la surface envahie par les chardons aura doublé au bout de 8 semaines ? Justifier la réponse.

Exercice 3 : (5 points)

Une entreprise produit du tissu.

Le coût total de production (en €) de l'entreprise est modélisé par la fonction

$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$ où x est la longueur de tissu fabriqué exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Chaque kilomètre de tissu est vendu 680 €.

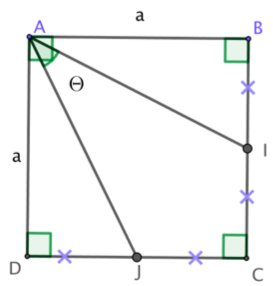
On note $B(x)$ le résultat de l'entreprise, c'est-à-dire la différence entre la recette et le coût de production, pour la vente de x kilomètres de tissu.

1. Quel est le résultat de l'entreprise pour la vente de 3 kilomètres de tissu ?
2. Montrer que : $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$.
3. Donner une expression de $B'(x)$, où B' est la fonction dérivée de la fonction B.
4. Dresser le tableau de signes de $B'(x)$ sur $[0; 10]$ puis le tableau de variations de la fonction B.
5. Combien de kilomètres de tissu l'entreprise doit-elle produire afin d'obtenir un résultat maximal ?

Exercice 4 : (5 points)

On considère un carré $ABCD$ de côté a ; on appelle I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[CD]$.

On appelle $\boldsymbol{\theta}$ l'angle $\widehat{IAJ}$



L'objectif de l'exercice est de déterminer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\boldsymbol{\theta}$ en degrés.

Pour cela, on calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$ de deux façons différentes.

1. Calculer le longueurs AI et AJ en fonction de a. En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$ en fonction de a et de $\boldsymbol{\theta}$.

2. a. En utilisant la relation de Chasles, écrire les deux vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$.

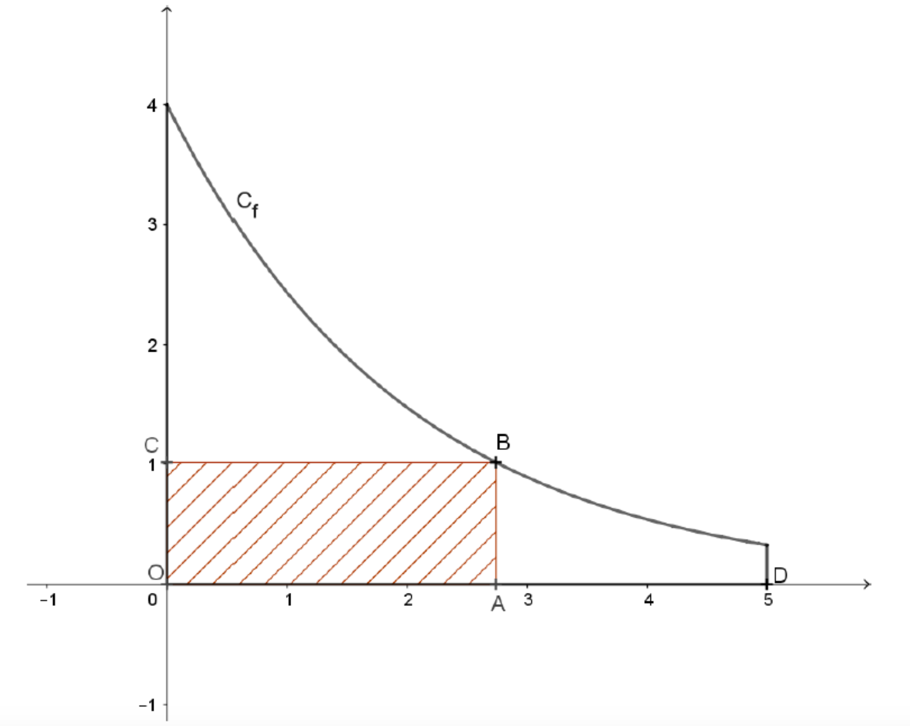
b. En déduire la valeur de $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$

3. Conclure à partir des deux résultats de $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$ en donnant la valeur exacte de $\cos(\boldsymbol{\theta})$ puis une valeur approchée de l'angle $\boldsymbol{\theta}$ au degré près.

Exercice 5 : (5 points)

Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire sur son terrain.

Celui-ci est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé, d'unité le mètre. Il est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 5$ et la courbe C_f représentative de la fonction f définie sur [0 ; 5] par $f(x) = 4e^{-0,5x}$.



L'enclos est représenté par le rectangle $OABC$ où O est l'origine du repère et B un point de C_f, A et C étant respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. On note x l'abscisse du point A et D le point de coordonnées $(5\ ;\ 0)$. Le but de l'exercice est de déterminer la position du point A sur le segment $[OD]$ permettant d'obtenir un enclos de superficie maximale.

1. Justifier que la superficie de l'enclos, en m², est donnée en fonction de x par $g(x) = 4xe^{-0,5x}$ pour x dans l'intervalle $[0\,;5]$.
2. La fonction g est dérivable sur $[0\,;5]$. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$, on a $g'(x) = (4 - 2x)e^{-0,5x}$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $[0\ ;\ 5]$.
4. Où doit-on placer le point A sur $[OD]$ pour obtenir une superficie d'enclos maximale ? Donner la superficie maximale possible en arrondissant le résultat au dm².

