Correction DS Commun S2

2nd degré - Suite - Dérivation -
Application de la dérivation - Produit
Scalaire - Exponentielle

Durée de l'épreuve : **01h55**

Calculatrice en mode examen autorisée.
Le candidat traite 4 exercices de son choix parmi les 5 exercices du sujet.
Réponses sur feuilles doubles numérotées, chaque exercice sur une nouvelle feuille.
Le candidat indique son nom et celui de son professeur sur chaque feuille.

Exercice 1 (5 points)

1. $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x+2}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2\}$

$u(x) = x^2 - 2 \qquad v(x) = x+2$
$u'(x) = 2x \qquad v'(x) = 1$

$$f('x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$= \frac{2x(x+2)-(x^2-2)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2+2}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+2}{(x+2)^2} \qquad \square$$

2. a. $N(x) = x^2+4x+2$
N est une fonction polynôme du second degré avec $a=1$, $b=4$ et $c=2$
On calcule le discriminant : $\Delta = b^2-4ac = 16-8 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 > 0$
N a donc deux racines distinctes : $x_1 = -2-\sqrt{2}$ et $x_2 = -2+\sqrt{2}$
Et comme $a > 0$, N est négative sur $[x_1; x_2]$ et positive sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$

b. $f'(x) = \dfrac{N(x)}{(x+2)^2}$ et $(x+2)^2 \geq 0$ *sur* $\mathbb{R}$ donc f' est du signe de N sur $\mathbb{R} - \{-2\}$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		-2		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$N(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	

3. T_0 : $\quad y = f'(0)(x-0) + f(0)$
$\qquad = \dfrac{1}{2}x - 1$

4. $f(x) = 0 \implies x^2-2 = 0 \implies \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) = 0 \implies x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$
Donc il y a deux points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses : $R_1\ \left(-\sqrt{2}; 0\right)$ et $R_2\ \left(\sqrt{2}; 0\right)$

5. $f(0) = -1$
Donc le point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des ordonnées a pour coordonnées : $A\,(0; -1)$

Exercice 2 (5 points)

1. a. $u_1 = u_0 + u_0 \times \dfrac{5}{100} + 15$
$= 1,05\,u_0 + 15$
$= 1,05 \times 300 + 15$
$= 330$

$u_2 = 1,05 \times u_1 + 15$
$= 1,05 \times 330 + 15$
$= 361,5$

b. $u_1 - u_0 = 30$ et $u_2 - u_1 = 31,5 \Longrightarrow u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0 \Longrightarrow u_n$ n'est pas une suite arithmétique

$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{330}{300}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{361,5}{330} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1} \quad \Longrightarrow \quad u_n$ n'est pas une suite géométrique

2. $u_{n+1} = 1,05\,u_n + 15$ et $v_n = u_n + 300$

a. $v_0 = u_0 + 300 = 600$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 300 \\ &= (1,05\,u_n + 15) + 300 \\ &= 1,05\,u_n + 315 \\ &= 1,05\,u_n + 1,05 \times \frac{315}{1,05} \\ &= 1,05\left(u_n + \frac{315}{1,05}\right) \\ &= 1,05\,(u_n + 300) \\ &= 1,05\,v_n \end{aligned}$$

Donc v_n est une suite géométrique de raison $q = 1,05$ et de 1er terme $u_0 = 600$ (1)

b. (1) $\Longrightarrow \quad v_n = v_0 \times q^n$

Or $v_n = u_n + 300$

Donc $u_n = v_n - 300$
$= v_0 \times q^n - 300$
$= 600 \times 1,05^n - 300 \quad \square$

3. $u_0 \times 2 = 600$ et $u_8 = 600 \times 1,05^8 - 300 \simeq 586,5 < 600$

Donc il n'est pas correct d'affirmer que la surface aura doublé au bout de 8 semaines.

Exercice 3 (5 points)

1. Si on vend 3 km de tissu :
La recette est : $3 \times 680 = 2040$ €
Le coût est : $C(3) = 15 \times 3^3 - 120 \times 3^2 + 500 \times 3 + 750 = 1575$ €
Et donc le bénéfice (résultat) est :$B(3) = 2040 - 1575 = 465$ €

2. Chaque kilomètres de tissus étant vendu 680 €, la recette (en €) est modélisée par la fonction : $R(x) = 680\,x$ où x est la longueur de tissu exprimée en km, x étant compris entre 0 et 10.

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 680\,x - \left(15\,x^3 - 120\,x^2 + 500\,x + 750\right) \\ &= 680\,x - 15\,x^3 + 120\,x^2 - 500\,x - 750 \\ &= -15\,x^3 + 120\,x^2 + 180\,x - 750 \qquad \square \end{aligned}$$

3. B définie et dérivable sur $[0; 10]$ de dérivée :

$$\begin{aligned} B'(x) &= -15 \times 3\,x^2 + 120 \times 2\,x + 180 \\ &= -45\,x^2 + 240\,x + 180 \\ &= 15(-3\,x^2 + 16\,x + 12) \end{aligned}$$

4. $-3\,x^2 + 16\,x + 12$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -3$, $b = 16$ et $c = 12$
On calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 16^2 + 4 \times 3 \times 12 = 16^2 + 12^2 = 4^2 \times (4^2 + 3^2) = 4^2 \times 5^2 = 20^2 > 0$
B' a donc deux racines distinctes : $x_2 = \dfrac{-16 - 20}{-6} = 6$ et $x_1 = \dfrac{-16 + 20}{-6} = -\dfrac{2}{3}$
Et comme $-45 < 0$, B' est positive sur $[x_1; x_2]$ et négative sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		6		10		$+\infty$
$-3\,x^2 + 16\,x + 12$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$B'(x)$			0			$+$	0	$-$			
B					$B(0)$	$\nearrow$	$B(6)$	$\searrow$	$B(10)$		

5. B atteint un maximum en 6 sur $[0; 10]$.

Donc l'entreprise obtient un bénéfice (résultat) maximal lorsqu'elle produit 6 km de tissu.

Exercice 4 (5 points)

1. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABI rectangle en B :

$$\begin{aligned} AI^2 &= AB^2 + BI^2 \\ &= a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{2^2} = \frac{4\,a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{5\,a^2}{4} \end{aligned}$$

Comme AI est positive, on a donc : $AI = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\,a$

Par ailleurs, les triangles ABI et ADJ sont égaux donc $AJ = AI$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} &= AI \times AJ \times cos\,\theta \\ &= \frac{5}{4}\,a^2 \times cos\,\theta \end{aligned}$$

2. a.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} &= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\right)^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\right)^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}\right)^2 \qquad \text{car } (AB) \text{ et } (AD) \text{ perpendiculaires} \\ &= \frac{1}{2}\,a^2 + \frac{1}{2}\,a^2 \qquad \text{car } \left(\overrightarrow{AD}\right)^2 = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 = a^2 \\ &= a^2 \end{aligned}$$

3. D'après 1. et 2. on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} &= \frac{5}{4}\,a^2 \times cos\,\theta = a^2 \\ \Longrightarrow \quad & cos\,\theta = \frac{4}{5} \\ \Longrightarrow \quad & \theta = arccos\left(\frac{4}{5}\right) \\ & \simeq 0.64\,rad \\ & \simeq 37\,° \end{aligned}$$

Exercice 5 (5 points)

1. $g(x) = OA \times AB$
$= x\, f(x)$
$= 4\,x\,e^{-0,5\,x}$ avec x dans $[0;5]$ $\square$

2. g définie et déribale sur $[0;5]$

$u(x) = 4x \qquad u'(x) = 4$
$v(x) = e^{-0,5\,x} \qquad v'(x) = -0,5\,e^{-0,5\,x}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'v + uv' \\ &= 4\,e^{-0,5\,x} + 4\,x \times (-0,5) \times e^{-0,5\,x} \\ &= 4\,e^{-0,5\,x} - 2\,x\,e^{-0,5\,x} \\ &= (4 - 2\,x)\,e^{-0,5\,x} \qquad \square \end{aligned}$$

3. $e^{-0,5\,x} > 0$ pour tout x donc g' est du signe de $4 - 2\,x$.

x	$-\infty$		0		2		5		$+\infty$
$4-2\,x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$g'(x)$				$+$	0	$-$			
g			$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	$g(5)$		

4. g atteint un maximum en 2 sur $[0;5]$.

Donc la superficie est maximale lorsque le point A a pour abscisse 2.

Cette superfice maximale vaut $g(2) = 8\,e^{-1} = \dfrac{8}{e} \simeq 2,94\ m^2 = 294\ dm^2$

