Correction DS05

Ch5 : Produit Scalaire
Ch6 : Application de la dérivation
Ch7 : Exponentielle

Durée de l'épreuve : **01h45**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisée.
Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.

Exercice 1 (5 points)

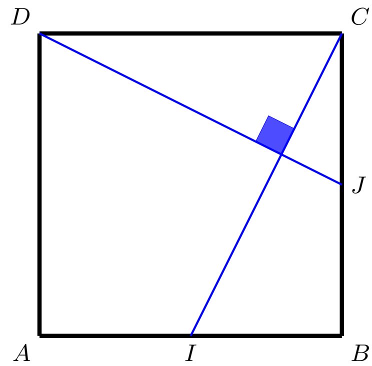
Résoudre l'équation : $e^{4x} + e^{2x} - 2 = 0 \qquad (1)$

Soit $X = e^{2x}$, on a $e^{4x} = \left(e^{2x}\right)^2 = X^2$.
Donc (1) $\iff X^2 + X - 2 = 0 \qquad (2)$

Résolvons l'équation du second degré (2) :
$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 = 3^2$
Donc l'équation (2) a deux racines distinctes : $X_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $X_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

Revenons à la variable x :
$X_1 = e^{2x}$ est impossible car X_1 est négative et l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$
$X_2 = e^{2x} \iff e^{2x} = 1 \iff e^{2x} = e^0 \iff 2x = 0 \iff x = 0$

Donc l'équation (1) a une unique solution : $x = 0 \qquad \square$



Exercice 2 (5 points)

$ABCD$ est un carré.
I est le milieu de $[AB]$
J est le milieu de $[BC]$

Montrer que (IC) et (DJ) sont perpendiculaires.
Vous utiliserez **deux** méthodes différentes.

1ère méthode : on utilise des décompositions vectorielles

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{DJ} &= \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}\right) \\ &= \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CJ} \\ &= IB \times DC + 0 + 0 - BC \times CJ \\ &= \frac{1}{2}AB \times AB - AB \times \frac{1}{2}AB \\ &= \frac{1}{2}(AB^2 - AB^2) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{DJ} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (IC) \perp (DJ) \qquad \square$

2ème méthode : on utilise les coordonnées

Soit le repère $\left(B; \overrightarrow{BI}; \overrightarrow{BJ}\right)$, on a alors : $I\,(1;0)$, $C\,(0;2)$, $J\,(0;1)$ et $D\,(2;2)$.

Et donc : $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JD}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Calculons le produit scalaire de $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{JD}$:
$\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{JD} = xx' + yy' = -1 \times 2 \ + \ 2 \times 1 = -2 + 2 = 0$

$\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{JD} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (IC) \perp (DJ) \qquad \square$

Exercice 3 (5 points)

Étudiez les variations des fonctions :

1. $f(x) = (2-x)\,e^{2x}$ $\quad f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit $u(x) = (2-x)$ et $v(x) = e^{2x}$, on a alors $u'(x) = -1$ et $v'(x) = 2e^{2x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= uv' + u'v \\ &= 2\,(2-x)e^{2x} - e^{2x} \\ &= e^{2x}\,(4-2x-1) \\ &= e^{2x}\,(3-2x) \end{aligned}$$

$e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f'(x)$ est du signe de $3-2x$

$\Longrightarrow$ f est croissante sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

$\Longrightarrow$ f atteint un maximum en $\frac{3}{2}$ qui vaut $\frac{1}{2}e^3$

2. $g(x) = \dfrac{e^{-2x+1}}{1-2x}$ $\quad g$ définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Soit $u(x) = e^{-2x+1}$ et $v(x) = 1-2x$, on a alors $u'(x) = -2\,e^{-2x+1}$ et $v'(x) = -2$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &= \frac{-2(1-2x)e^{-2x+1} - (-2)e^{-2x+1}}{(1-2x)^2} \\ &= \frac{e^{-2x+1}\big(-2(1-2x)+2\big)}{(1-2x)^2} \\ &= \frac{e^{-2x+1}(-2+4x+2)}{(1-2x)^2} \\ &= \frac{4\,x\,e^{-2x+1}}{(1-2x)^2} \end{aligned}$$

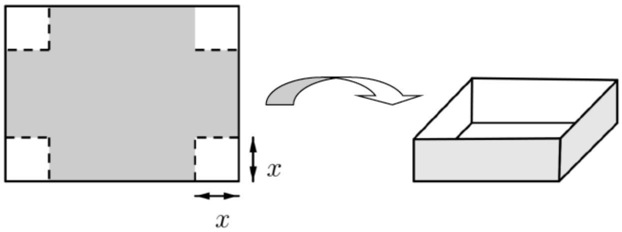
$e^{-2x+1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad g'(x)$ est du signe de $\dfrac{x}{(1-2x)^2}$

$\Longrightarrow$ g est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$\Longrightarrow$ g atteint un minimum local en 0 qui vaut e

Exercice 4 (5 points)

A partir d'une plaque métallique de 3 mètres sur 2 mètres, on veut fabriquer une benne à ordure en coupant le même carré sur chaque coin de la plaque :



Déterminer la valeur de x pour obtenir le volume maximal.

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(x) &= x(2-2x)(3-2x) \qquad \forall x \in]0;1[\\ &= 4x^3 - 10x^2 + 6x\end{aligned}$$

$V'(x) = 12x^2 - 20x + 6 = 2(6x^2 - 10x + 3)$

$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 72 = 28 = \left(2\sqrt{7}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \dfrac{5+\sqrt{7}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{5-\sqrt{7}}{6}$

$\Longrightarrow \quad V'(x) = \dfrac{1}{18}(x - x_1)(x - x_2)$

$2 < \sqrt{7} < 3 \quad \Longrightarrow \quad x_1 > \dfrac{7}{6} > 1 \quad$ et $\quad 0 < \dfrac{2}{6} < x_2 < \dfrac{3}{6} < 1$

x	$-\infty$		0		x_2		1		x_1		$+\infty$
$\mathcal{V}'(x)$				$+$	0	$-$			0		
$\mathcal{V}$			0	$\nearrow$	$\mathcal{V}(x_2)$	$\searrow$	0				

Donc le volume est maximal en $x_2 = \dfrac{5-\sqrt{7}}{6}$

