Correction Evaluation 04

Probabilités Conditionnelles

Durée de l'épreuve : **50 minutes**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.

Le professeur X utilise un algorithme pour essayer de détecter si un devoir maison a été réalisé avec une intelligence artificielle (IA).

On considère les évènements :
- **I** : « l'élève a réalisé son devoir avec une IA » ;
- **T** : « le test est positif, l'algorithme estime que le devoir a été réalisé par une IA ».

Par ailleurs on sait que :
- pour les devoirs réalisés avec une IA, le test est positif à 90% (vrais positifs) ;
- pour les devoirs non réalisés par une IA, le test est positif dans 1% des cas (faux positifs).

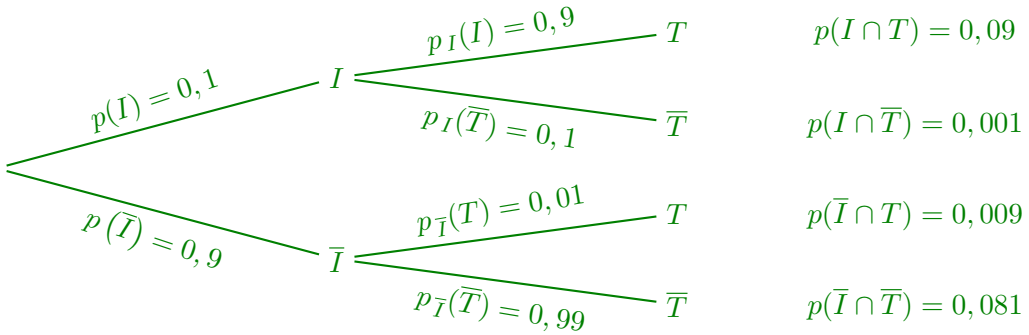
Partie A

On suppose dans cette partie que 10% des devoirs ont été réalisés par une IA.

1. Traduire en termes de probabilités les informations chiffrées de l'énoncé.
$p(I) = 0,1 \quad ; \quad p_I(T) = 0,9 \quad ; \quad p_{\overline{I}}(T) = 0,01 \quad ;$

2. Traduire $p(I \cap T)$ par une phrase (sans la calculer).
La probabilité que l'élève est réalisé son devoir avec une IA et que le test soit positif.

3. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité complet.



4. Montrer que la probabilité que le test soit positif est de 9,9%.
I et $\overline{I}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(T \cap I) + p(T \cap \overline{I}) \\ &= p(T) \times p_I(T) + p(\overline{I}) \times p_{\overline{I}}(T)) \\ &= 0,1 \times 0,9 + (1 - 0,1) \times 0,01 \\ &= 0,09 + 0,009 \\ &= 0,099 \\ &= 9,9\% \end{aligned}$$

 Licence CC BY-NC-SA 4.0

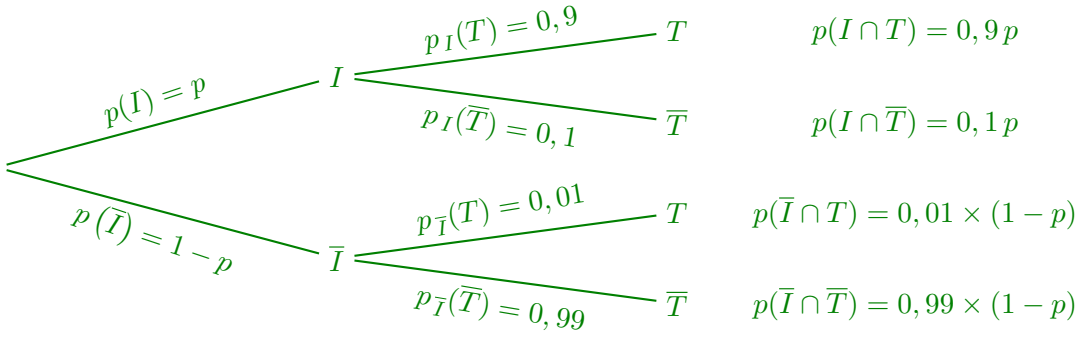
5. Le devoir de l'élève Y se révèle positif au test. Déterminer la probabilité que l'élève Y ait utilisé une IA pour réaliser son devoir.

$p_T(I) = \dfrac{p(T \cap I)}{p(T)} = \dfrac{p(T) \times p_I(T)}{p(T)} = \dfrac{0,090}{0,099} = \dfrac{90}{99} = \dfrac{10}{11}$

Partie B

Dans cette partie, on note p la proportion des devoirs réalisés par une IA.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilité complet.



2. Déterminer la probabilité d'un faux positif en fonction de p.

$$\begin{aligned} p(\overline{I} \cap T) &= p(\overline{I}) \times p_{\overline{I}}(T) \\ &= 0,01 \times (1-p) \end{aligned}$$

3. Montrer que la probabilité que le test soit négatif est égale à $0,99 - 0,89p$.

I et $\overline{I}$ formenent une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(\overline{T}) &= p(\overline{T} \cap I) + p(\overline{T} \cap \overline{I}) \\ &= p(I) \times p_I(\overline{T}) + p(\overline{I}) \times p_{\overline{T}}(\overline{T})) \\ &= 0,1\,p + 0,99 \times (1-p) \\ &= 0,10\,p + 0,99 - 0,99p \\ &= 0,99 - 0,89\,p \end{aligned}$$

4. Déterminer les valeurs de p pour lequelles, si le test est positif, il est plus probable que le devoir n'ait pas été réalisé par une IA.

On cherche à résoudre l'inéquation : $p_T(\overline{I}) > p_T(I)$

$$p_T(\overline{I}) > p_T(I) \iff \frac{p(T \cap \overline{I})}{p(T)} > \frac{p(T \cap I)}{p(T)} \iff p(T \cap \overline{I}) > p(P \cap I) \quad \text{car } p(T) > 0$$

$$\iff p(\overline{I}) \times p_{\overline{I}}(T) > p(I) \times p_I(T) \iff 0,01 \times (1-p) > 0,9\,p$$

$$\iff 91\,p < 1 \iff p < \frac{1}{91}$$

Donc si $p \in \left[0; \dfrac{1}{91}\right[$, il est plus probable que, si le test est positif, l'élève n'ait pas triché.

Question bonus Le professeur décide de mettre zéro à un élève si, sur 10 tests, au moins 9 sont positifs. Déterminer la proportion maximale de devoirs réalisés par une IA pour que le risque que le professeur se trompe soit inférieur à un sur un milliard.

 Licence CC BY-NC-SA 4.0