

Correction DS 02

Second degré
Suites

Durée de l'épreuve : **1h50**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.

EXERCICE 1 (5 points)

1. Déterminer deux nombres dont la somme vaut 1 et dont le produit vaut $-\frac{3}{4}$.

$$\left. \begin{array}{l} S = x_1 + x_2 = 1 \\ P = x_1 \times x_2 = -\frac{3}{4} \end{array} \right\} \iff x^2 - Sx + P = 0 \iff x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\iff 4x^2 - 4x - 3 = 0$$

Calculons le discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 16 + 48 = 64 = 8^2 > 0$.

$\Delta > 0$, l'équation possède donc deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-4) - 8}{2 \times 4} = \frac{4 - 8}{8} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 + 8}{8} = \frac{3}{2}.$$

Les deux nombres recherchés sont donc $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

2. Déterminer la raison d'une suite arithmétique (a_n) sachant que $a_3 = 41$ et $a_{15} = 5$.

$$\text{On a : } a_n = a_p + (n - p)r$$

En appliquant avec $n = 15$ et $p = 3$:

$$a_{15} = a_3 + (15 - 3)r \implies 12r = a_{15} - a_3 \implies r = \frac{a_{15} - a_3}{12} = \frac{-36}{12} = -3.$$

La raison de la suite arithmétique est donc $r = -3$.

3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel par : $u_n = n^2 + n + 1$.
Déterminer si (u_n) est une suite arithmétique et, le cas échéant, préciser sa raison.

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) + 1 = (n^2 + 2n + 1) + n + 1 + 1 = n^2 + 3n + 3.$$

$$u_{n+1} - u_n = (n^2 + 3n + 3) - (n^2 + n + 1) = 2n + 2.$$

La différence entre deux termes successifs dépend de l'entier n , elle n'est pas constante, donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

4. Soit la suite arithmétique (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et de raison $r = -2$.

- a.** Écrire la définition par récurrence de la suite (u_n) .

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$

- b.** Écrire la définition par une formule explicite de la suite (u_n) et en déduire la valeur de u_{100} .

$$u_n = u_0 + nr = 10 - 2n \text{ pour tout entier naturel } n.$$

$$u_{100} = 10 - 2 \times 100 = 10 - 200 = -190.$$

- c.** Calculer la somme des 101 premiers termes de la suite (u_n) .

Les 101 premiers termes de la suite vont du rang 0 au rang 100 et leur somme vaut :

$$\begin{aligned} S &= \text{nombre de termes} \times \frac{u_0 + u_{100}}{2} \\ &= 101 \times \frac{10 + (-190)}{2} = 101 \times \frac{-180}{2} = 101 \times (-90) = -9090. \end{aligned}$$

EXERCICE 2 (4 points)

Layina étudie la trajectoire d'un drone miniature lancé depuis le toit d'un petit hangar.

La hauteur du drone (exprimée en mètres) en fonction du temps écoulé t (exprimé en secondes) depuis son lancement est modélisée par la fonction h définie par :

$$h(t) = -t^2 + 4t + 5$$

1. Déterminer la hauteur du hangar.

Le drone est lancé à l'instant initial $t = 0$ depuis le toit d'un hangar.

$$\text{Or on a : } h(0) = -0^2 + 4(0) + 5 = 5$$

La hauteur du hangar est donc de 5 mètres.

2. Déterminer à quel instant t l'appareil touche le sol (sa hauteur est alors égale à 0 mètre).

On résout l'équation $h(t) = 0$ avec t un réel strictement positif :

$$h(t) = 0 \iff -t^2 + 4t + 5 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 16 + 20 = 36 = 6^2 > 0$$

$$t_1 = \frac{-4 - 6}{2 \times (-1)} = 5 > 0 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-4 + 6}{2 \times (-1)} = -1 < 0$$

On élimine la solution t_2 qui est négative, l'appareil touche donc le sol au bout de 5 secondes.

3. Déterminer l'ensemble des instants t pour lesquels le drone vole à une hauteur strictement supérieure à 8 mètres.

On résout l'inéquation $h(t) > 8$ avec t dans l'intervalle $[0 ; 5]$

$$h(t) > 8 \iff -t^2 + 4t + 5 > 8 \iff -t^2 + 4t - 3 > 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4 = 2^2 > 0$$

$$t_1 = \frac{-4 - 2}{-2} = 3 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-4 + 2}{-2} = 1.$$

Le coefficient $a = -1$ étant strictement négatif, le trinôme est strictement positif entre ses racines, l'ensemble des instants recherché est donc l'intervalle $]1 ; 3[$.

4. Déterminer la hauteur maximale atteinte par le drone.

La fonction h est une fonction polynômiale du second degré avec $a = -1 < 0$.

Elle atteint donc un maximum au sommet de la parabole lorsque $t = \alpha$ avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-1)} = 2$$

$$\text{Cette hauteur maximale vaut } \beta = h(\alpha) = h(2) = -2^2 + 4 \times 2 + 5 = 9$$

La hauteur maximale est donc de 9 mètres (atteinte 2 secondes après le décollage).

EXERCICE 3 (6 points)**Partie A**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 5x - 4$$

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

Soit T la droite d'équation : $y = x - 1$.

1. Étudier les variations de f .

La fonction f est une fonction polynômiale du second degré avec $a = -1 < 0$ donc f est croissante sur $] -\infty ; \alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$ avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-5}{2 \times (-1)} = 2,5 \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = -(2,5)^2 + 5 \times 2,5 - 4 = 2,25$$

x	$-\infty$	$2,5$	$+\infty$
f	$-\infty$	$2,25$	$-\infty$

2. Montrer que sur l'intervalle $]4 ; +\infty[$, $f(x)$ est strictement négative.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 25 - 16 = 9 = 3^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-5 - 3}{2 \times (-1)} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 + 3}{2 \times (-1)} = 1$$

Comme $a = -1 < 0$, $f(x)$ est strictement négatif à l'extérieur des racines :

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc sur l'intervalle $]4 ; +\infty[$, $f(x)$ est bien strictement négative.

3. Étudier les positions relatives entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite T .

On étudie le signe de la différence $f(x) - (x - 1)$:

$$f(x) - (x - 1) = -x^2 + 5x - 4 - x + 1 = -x^2 + 4x - 3$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4 = 2^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-4 - 2}{2 \times (-1)} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + 2}{2 \times (-1)} = 1$$

$\Delta > 0$ et $a = -1 < 0$ donc $f(x) - (x - 1)$ est positive entre ses racines :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f(x) - (x - 1)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc :

- la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite T sur les intervalles $] -\infty ; 1]$ et $[4 ; +\infty[$,

Partie B la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite T sur l'intervalle $[1 ; 4[$.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par la relation de récurrence :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n - n^2 + 5n - 4$$

4. Calculer les valeurs des termes u_1 , u_2 et u_3 .

$$u_1 = u_0 - 0^2 + 5 \times 0 - 4 = 2 - 4 = -2$$

$$u_2 = u_1 - 1^2 + 5 \times 1 - 4 = -2 - 1 + 5 - 4 = -2$$

$$u_3 = u_2 - 2^2 + 5 \times 2 - 4 = -2 - 4 + 10 - 4 = 0.$$

5. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

Étudions le signe de la différence entre deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = -n^2 + 5n - 4 = f(n) \text{ avec } f \text{ la fonction définie dans la partie A.}$$

Or, la fonction $f(x)$ est strictement négative sur $]4 ; \infty[$.

Donc (u_n) est strictement décroissante à partir du rang $n = 4$

6. Écrire un programme Python qui calcule la valeur de u_{100} .

EXERCICE 4 (5 points)

On considère l'équation suivante (où x est l'inconnue) :

$$mx^2 + 4x + (m - 3) = 0$$

Déterminer le nombre de solutions de cette équation selon les valeurs du paramètre m .

Étape 0 : Cas particulier $a = 0$

Le coefficient devant x^2 est $a = m$. Si $m = 0$, l'équation n'est plus du second degré. Elle devient :
 $4x + (0 - 3) = 0 \iff 4x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{4}$

Donc, si $m = 0$, l'équation admet une unique solution.

Étape 1 : Calcul du premier discriminant Δ_x (pour $m \neq 0$)

Si $m \neq 0$, l'équation est du second degré avec $a = m$, $b = 4$, et $c = m - 3$.

$$\begin{aligned}\Delta_x &= b^2 - 4ac \\ &= 4^2 - 4 \times m \times (m - 3) \\ &= 16 - 4m^2 + 12m \\ &= -4(m^2 - 3m - 4)\end{aligned}$$

Étape 2 : Étude du signe de Δ_x via un second discriminant Δ_m

Cherchons les racines de $m^2 - 3m - 4$:

$$\begin{aligned}\Delta_m &= (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) \\ &= 9 + 16 \\ &= 25 = 5^2\end{aligned}$$

Les deux racines de Δ_m sont :

$$m_1 = \frac{-(-3)-5}{2 \times 1} = -1 \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{-(-3)+5}{2 \times 1} = 4$$

Le coefficient a de Δ_x étant négatif ($-4 < 0$), Δ_x est strictement positif à l'intérieur des racines, c'est-à-dire pour $m \in] -1 ; 4[$.

Étape 3 : Conclusion générale

- Si $m = 0$: L'équation est du premier degré et possède une unique solution.
- Si $m = -1$ ou $m = 4$: $\Delta_x = 0$, l'équation possède une unique solution réelle (racine double).
- Si $m \in] -1 ; 0[\cup] 0 ; 4[$: $\Delta_x > 0$, l'équation possède **deux solutions réelles distinctes**.
- Si $m \in] -\infty ; -1[\cup] 4 ; +\infty[$: $\Delta_x < 0$, l'équation n'admet aucune solution réelle.