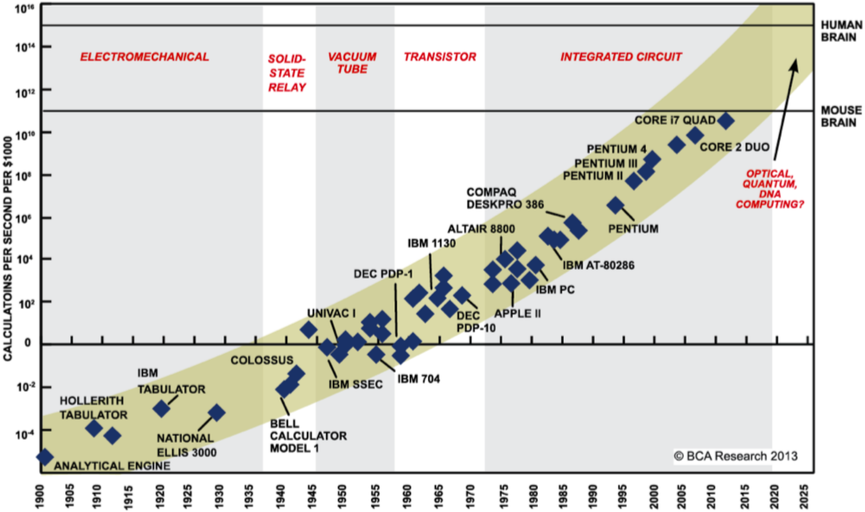
Exponentielle

MatheX

17 juin 2021



SOURCE: RAY KURZWEIL, "THE SINGULARITY IS NEAR: WHEN HUMANS TRANSCEND BIOLOGY", P.67, *THE VIKING PRESS*, 2006. DATAPOINTS BETWEEN 2000 AND 2012 REPRESENT BCA ESTIMATES.

Exponentielle

Table des matières :

Exponentielle

Table des matières :

Exponentielle

Théorème 1 : (fonction égale à sa dérivée)

Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que :

- $\boxed{f'(x) = f(x)}$

  et

- $\boxed{f(0) = 1}$

Exponentielle

Démonstration :

- Existence : Admise

- Racine :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$
Soit $\varphi(x) = f(x)f(-x)$

f dérivable sur $\mathbb{R}$ donc φ dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f'(x)f(-x) + f(x) \times (-1) \times f'(-x) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad (1)\end{aligned}$$

$$(1) \implies \varphi(x) = k \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

$f(0) = 1$ par définition de f $\quad (3)$

$$(2) \text{ et } (3) \implies \varphi(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exponentielle

Démonstration :

∘ Unicité :

Soit f et g deux fonctions qui vérifient le théorème.

On étudie la fonction $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

f et g dérivables sur $\mathbb{R}$ et g n'a pas de racine donc h dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$h' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2} = \frac{f\,g - f\,g}{g^2} = 0 \qquad (1)$$

$$(1) \;\Rightarrow\; h(x) = k \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

$h(0) = 1$ par définition de f et g $\qquad (3)$

$$(2) \text{ et } (3) \;\Rightarrow\; h(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \square$$

Exponentielle

Définition 1 : (fonction exponentielle)

La fonction définie précédemment est appelée fonction exponentielle , notée $exp(x)$

Exponentielle

Table des matières :

Exponentielle

Propriété 1 : (racine, image de l'opposé)

$\forall x \in \mathbb{R}$

- $\boxed{exp(x) \neq 0}$
- $\boxed{exp(-x) = \dfrac{1}{exp(x)}}$

Démonstration :

Voir démonstration du Théorème 1 (Racine)

Exponentielle

Propriété 2 : (relation fonctionnelle)

$\forall$ x *et* $y \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{exp(x+y) = exp(x) \cdot exp(y)}$$

Exponentielle

Exemple :

Calculez en fonction de $exp(1)$ *:*

a. $exp(2)$

b. $exp(n)$ avec $n \in \mathbb{N}$

Exponentielle

Exemple : *Calculez en fonction de $exp(1)$:*

a. $exp(2)$

$$exp(2) = exp(1+1) = exp(1) \cdot exp(1) = \Big(exp(1)\Big)^2$$

b. $exp(n)$ avec $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} exp(n) &= exp(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\ fois}) \\ &= \underbrace{exp(1) \cdot exp(1) \cdot \ \cdots \ \cdot exp(1)}_{n\ fois} \\ &= \Big(exp(1)\Big)^n \end{aligned}$$

Exponentielle

Démonstration :

On étudie la fonction $h_a(x) = \dfrac{exp(x+a)}{exp(a)}$

exp dérivable sur $\mathbb{R}$ et exp n'a pas de racine donc h_a dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$h_a'(x) = \frac{1}{exp(a)} \cdot \Big(exp(x+a)\Big)' = \frac{1}{exp(a)} \cdot exp(x+a) = h_a(x) \qquad (1)$$

$$h_a(0) = \frac{exp(0+a)}{exp(a)} = 1 \qquad (2)$$

(1) et $(2) \Rightarrow h_a(x) = exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\ et\ \forall a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow exp(x+a) = exp(x) \cdot exp(a) \quad \forall x \in \mathbb{R}\ et\ \forall a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow exp(x+y) = exp(x) \cdot exp(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}\ et\ \forall y \in \mathbb{R} \qquad \square$

Exponentielle

Propriété 3 : (conséquences de la relation fonctionnelle)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{exp(nx) = \left(exp(x)\right)^n} \qquad (1)$$

$$\boxed{exp(x-y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}} \qquad (2)$$

$$\boxed{exp(x) > 0} \qquad (3)$$

Exponentielle

Exemple : *Simplifiez les expressions algébriques :*

a. $exp(x+1) \cdot exp(1-x)$

b. $\dfrac{\left(exp(-x+1)\right)^3}{\left(exp(-2x-1)\right)^2}$

Exponentielle

Exemple : *Simplifiez les expressions algébriques :*

a. $exp(x+1) \cdot exp(1-x) = exp(x+1+1-x) = exp(2) = \left(exp(1)\right)^2$

b. $$\frac{\left(exp(-x+1)\right)^3}{\left(exp(-2x-1)\right)^2} = \frac{exp\left(3\,(-x+1)\right)}{exp\left(2\,(-2x-1)\right)}$$

$$= exp\left(3\,(-x+1) - 2\,(-2x-1)\right)$$

$$= exp(-3x+3+4x+2)$$

$$= exp(x+5)$$

$$= exp(5)\,exp(x)$$

Exponentielle

Démonstration :

(1) : on applique la relation fonctionnelle $n-1$ fois

$$\begin{aligned} exp(nx) &= exp(x+(n-1)\,x) \\ &= exp(x)\,exp((n-1)\,x) \\ &= exp(x)\,exp(x+(n-2)\,x) \\ &= exp(x)\,exp(x)\,exp((n-2)x) \\ &= \cdots \\ &= \big(exp(x)\big)^n \end{aligned}$$

(2) : on applique la relation fonctionnelle et la Propriété 1-Image de l'inverse

$$exp(x-y) = exp(x+(-y)) = exp(x)\cdot exp(-y) = \frac{exp(x)}{exp(y)} \qquad \square$$

(3) : on applique la relation fonctionnelle avec $\dfrac{x}{2}$

$$exp(x) = exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \left(exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Et comme *exp* n'a pas de racine, on a bien : $exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\square$

Exponentielle

Définition 2 : (notation en puissance)

On notera désormais :

- $\boxed{e \simeq 2,718}$ le nombre irrationnel $exp(1)$
- $\boxed{e^x}$ la fonction exponentielle

On dit "e exposant x" ou " exponentielle de x".

Exponentielle

Exemple : *Réécrire les propriétés de la fonction exponentielle avec la notation en puissance :*

Exponentielle

Exemple : *Réécrire les propriétés de la fonction exponentielle avec la notation en puissance :*

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{R}$:

$$(e^x)' = e^x \qquad (1)$$

$$e^0 = 1 \qquad (2)$$

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \qquad (3)$$

$$e^{nx} = \left(e^x\right)^n \qquad (4)$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad (5)$$

$$e^x > 0 \qquad (6)$$

Exponentielle

Table des matières :

Exponentielle

Propriété 4 : (étude de e^x)

La fonction e^x est :

- strictement positive sur $\mathbb{R}$
- strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Exponentielle

Exemple : *Étudiez la fonction e^x et sa courbe représentative C_e :*

a. Dressez le tableau de variation de e^x

b. Déterminez l'équation de T_0 tangente à C_e en $x = 0$:

Exponentielle

Exemple : *Étudiez la fonction e^x et sa courbe représentative C_e :*

a. Dressez le tableau de variation de e^x

e^x est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée e^x strictement positive sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\left(e^x\right)' = e^x$		$+$		
e^x	0	1	e	$+\infty$

b. Déterminez l'équation de T_0 tangente à C_e en $x = 0$:

$\left(e^x\right)' = e^x$ et $e^0 = 1 \;\Rightarrow\; T_0 : y = x + b$

$e^0 = 1 \;\Rightarrow\; b = 1 \;\Rightarrow\; T_0 : y = x + 1$

Exponentielle

Exemple : *Étudiez la fonction e^x et sa courbe représentative C_e :*

c. Déterminez l'équation de T_1 tangente à C_e en $x = 1$:

d. Tracez C_e :

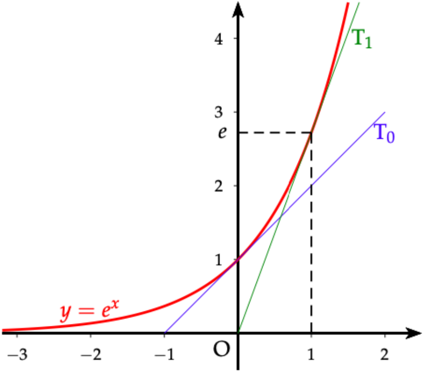
Exponentielle

Exemple : *Étudiez la fonction e^x et sa courbe représentative C_e :*

c. Déterminez l'équation de T_1 tangente à C_e en $x = 1$:

$(e^x)' = e^x$ et $e^1 = e \implies T_1 : y = e\,x + b$
$e^1 = e \implies b = 0 \implies T_1 : y = e\,x$

d. Tracez C_e :



Exponentielle

Propriété 5 : (étude de e^{ax+b})

Soit a et b des réels.

La fonction e^{ax+b} est :

- strictement positive sur $\mathbb{R}$
- dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée : $\left(e^{ax+b}\right)' = a \cdot e^{ax+b}$
- dépendante de a pour sa variation :
  - $\underline{a > 0}$: strictement croissante sur $\mathbb{R}$
  - $\underline{a < 0}$: strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
  - $\underline{a = 0}$: constante sur $\mathbb{R}$

Exponentielle

Exemple : *Étudiez les fonctions et représentez les :*

a. $f_k(x) = e^{kx}$ avec $k \in \mathbb{R}^{+*}$

b. $g_k(x) = e^{-kx}$ avec $k \in \mathbb{R}^{+*}$

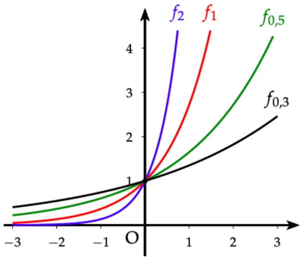
Exponentielle

Exemple :

Étudiez les fonctions et représentez les :

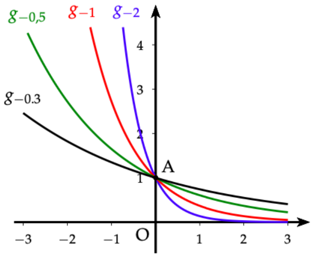
a. $f_k(x) = e^{kx}$ avec $k \in \mathbb{R}^{+*}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'_k(x) = k\,e^{kx}$		$+$		
$f_k(x) = e^{kx}$	0 ↗	1 ↗	e^k ↗	$+\infty$



b. $g_k(x) = e^{-kx}$ avec $k \in \mathbb{R}^{+*}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g'_k(x) = -k\,e^{-kx}$		$-$		
$g_k(x) = e^{-kx}$	$+\infty$ ↘	1 ↘	$\frac{1}{e^k}$ ↘	0



Exponentielle

Propriété 6 : (résolution d'équations/inéquations)

Comme e^x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$e^x = e^y \iff x = y$$

$$e^x > e^y \iff x > y$$

$$e^x < e^y \iff x < y$$

Exponentielle

Exemple : *Résoudre les équations/inéquations :*

a. $e^{2x+1} = e^{x-1}$

b. $e^{x-1} = 1$

c. $e^{x-1} = 0$

d. $e^{2x-1} > 0$

e. $\dfrac{e^{2x^2+x}}{e^{x^2-x-1}} < 1$

Exponentielle

Exemple : *Résoudre les équations/inéquations :*

a. $e^{2x+1} = e^{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 1 = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$

b. $e^{x-1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x-1} = e^0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

c. $e^{x-1} = 0$
impossible car $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ donc $S = \varnothing$

d. $e^{2x-1} > 0$
toujours vrai car $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ donc $S = \mathbb{R}$

e. $\dfrac{e^{2x^2+x}}{e^{x^2-x-1}} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{(2x^2+x)-(x^2-x-1)} < e^0$
$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad S = \emptyset$

Exponentielle

Propriété 7 : (étude de la suite e^{na})

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

La suite $u_n = e^{na}$ est une suite géométrique de raison e^a et de premier terme 1

Démonstration :

$u_0 = e^0 = 1$

$u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na+a} = e^a \cdot e^{na} = e^a \cdot u_n$ pour tout n $\square$

Exponentielle

Exemple : *Soit une population de 100 lapins qui double tous les ans.*

a. Modéliser par une suite géométrique :

b. Calculer la taille de la population au bout de 10 ans :

c. Calculer la taille de la population au bout de 3 ans et 17 jours :

On considère la fonction $f(x) = 100\, e^{ax}$ avec a tel que $e^{a} = 2$

d. Vérifier que $f(n) = u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

e. Reprendre la question c. en utilisant f :

Exponentielle

Exemple : *Soit une population de 100 lapins qui double tous les ans.*

a. Modéliser par une suite géométrique :
$u_0 = 100$ et $u_{n+1} = 2u_n \ \forall n \in \mathbb{N} \implies u_n = 100 \times 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b. Calculer la taille de la population au bout de 10 ans :
$u(10) = 100 \times 2^{10} = 102\,400$

c. Calculer la taille de la population au bout de 3 ans et 17 jours :
attention la suite est une modélisation discrète ($\mathbb{N}$) et non pas continue ($\mathbb{R}$)

On considère la fonction $f(x) = 100\, e^{ax}$ avec a tel que $e^a = 2$

d. Vérifier que $f(n) = u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$:
$f(n) = 100\, e^{a \cdot n} = 100\left(e^a\right)^n = 100 \times 2^n = u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

e. Reprendre la question c. en utilisant f :
$f(3 + {}^{17}/_{365}) = f({}^{1112}/_{365}) \simeq 826$