

DS 01

Nombres Complexes : point de vue algébrique

Durée de l'épreuve : **55 minutes***L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.**Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.**Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.**La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.***Exercice 1**Soit $z = a + ib$ avec a et b des réels.

Mettre sous forme algébrique :

1. z^2

2. $\frac{1}{z}$

3. $\frac{z}{\bar{z}}$

Exercice 2Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-après :

1. $z = \bar{z} + 1$

2. $z^3 = 1$

3. $z^4 - 16 = 0$

Exercice 3Soit la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1$.1. Calculer les images de i , $-i$ et $2i$.2. Factoriser f .**Exercice 4**Soit $z' = \frac{1+z}{1-z}$ Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que z' soit un imaginaire pur.**Exercice 5**Soit $P(z)$ un polynôme complexe de degré 3 à coefficients réels.Soit α une racine de P .1. Démontrer que $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ avec Q un polynôme de degré 2.2. Déterminer les coefficients de Q en fonction de α et des coefficients de P .