

Correction Évaluation 01

Raisonnement par récurrence
Limites de suites

Durée de l'épreuve : **50 minutes**

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.

Exercice 1 (8 points)

Démontrer par récurrence que pour tout réel $q \neq 1$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Soit la propriété $P_n : 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

◦ Initialisation :

$$\text{Au rang } n = 1 : \frac{1 - q^{1+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^2}{1 - q} = \frac{(1 - q)(1 + q)}{1 - q} = 1 + q$$

Donc P_1 est vraie et la propriété est initialisée.

◦ Hérédité :

on suppose P_k vraie à un certain rang k , on a donc :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} \quad (HR)$$

On essaie de montrer que P_{k+1} est vraie, c'est à dire que :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^k + q^{k+1} = \frac{1 - q^{k+2}}{1 - q}$$

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} \quad (HR)$$

$$\Rightarrow 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^k + q^{k+1} = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} + q^{k+1}$$

$$\Rightarrow 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^k + q^{k+1} = \frac{1 - q^{k+1} + q^{k+1}(1 - q)}{1 - q} = \frac{1 - q^{k+1} + q^{k+1} - q^{k+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{k+2}}{1 - q}$$

donc P_{k+1} est vraie et la propriété est héréditaire

◦ Conclusion :

La propriété est initialisée au rang $n = 1$ et est héréditaire, donc par le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel non nul.

Exercice 2 (8 points)

Déterminer la limite des suites définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$1. u_n = -n^2 + 2n - 1 = -n^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1 \quad \text{par somme} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \quad \text{par produit}$$

$$2. u_n = \frac{2n^2 - n + 1}{n^3 - n - 1} = \frac{2n^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)}{n^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{2 \times \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)}{n \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) = 1 \quad \text{par somme} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) = 2 \quad \text{par produit} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) = 1 \\ \text{par somme} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) = +\infty \quad \text{par produit} \quad (2)$$

$$(1) \quad \text{et} \quad (2) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{par quotient}$$

$$3. u_n = n^2 - \sin n$$

$$-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sin n \leq 1 \Rightarrow n^2 - 1 \leq n^2 - \sin n \leq n^2 + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^* : n^2 - \sin n \geq n^2 - 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty \quad \text{par somme} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{par comparaison}$$

$$4. u_n = \frac{2n - \cos n}{-n + (-1)^n} = \frac{2n \cdot \left(1 - \frac{\cos n}{2n}\right)}{-n \cdot \left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right)} = -2 \times \frac{1 - \frac{\cos n}{2n}}{1 - \frac{(-1)^n}{n}}$$

$$-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2n} \leq \frac{\cos n}{2n} \leq \frac{1}{2n} \quad \text{car } 2n > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^* : -\frac{1}{2n} \leq \frac{\cos n}{2n} \leq \frac{1}{2n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{2n} = 0 \quad \text{d'après le théorème des gendarmes}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\cos n}{2n} = 1 \quad \text{par somme}$$

$$\text{De manière similaire, on obtient } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} = 1$$

$$\text{Ainsi, par quotient puis par produit, on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$$

Exercice 3 (4 points)

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par :

$$u_n = n^2 - 2n$$

1. Que faut-il faire pour montrer, à l'aide de la définition de la limite, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$?

Il faut montrer que tout intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N , avec A un réel aussi grand que l'on souhaite.

(Pour tout réel A , il existe un rang N tel que pour tout $n \geq A$, $u_n > A$)

2. Déterminer le rang à partir duquel : $u_n > 10^6 - 1$

$$u_n > 10^6 - 1 \Leftrightarrow n^2 - 2n - (10^6 - 1) > 0$$

On étudie le signe de la fonction second degré : $f(x) = x^2 - 2x - (10^6 - 1)$

$$\Delta = 4 + 4 \times (10^6 - 1) = 4 \times 10^6 = (2 \times 10^3)^2 > 0$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \text{ avec } x_1 = 1 - 10^3 = -999 \text{ et } x_2 = 1 + 10^3 = 1001$$

Et comme $a = 1 > 0$, f est strictement positive sur $]1001; +\infty[$.

Ainsi, pour tout $n \geq 1002$, on a $u_n > 10^6 - 1$

3. Montrer, à l'aide de la définition de la limite, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On essaie de résoudre $u_n > A$:

$$u_n > A \Leftrightarrow n^2 - 2n - A > 0$$

On étudie le signe de la fonction second degré : $f(x) = x^2 - 2x - A$

$$\Delta = 4 + 4A = 4 \times (1 + A) > 0 \text{ pour tout réel } A > -1$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \text{ avec } x_1 = \frac{2 - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{2 + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Et comme $a = 1 > 0$, f est strictement positive sur $]x_2; +\infty[$.

Et donc $u_n > A$ pour tout $n \geq E(x_2) + 1$.

Pour conclure, on a bien prouvé que pour tout réel A suffisamment grand, il existe un rang $N = E(x_2) + 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > A$

et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$