

**DS07**

Géométrie dans l'espace  
Fonction logarithme népérien

Durée de l'épreuve : **1h55**

*L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.*

*Le candidat répond sur feuilles doubles numérotées et garde l'énoncé.*

*Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte.*

**EXERCICE 1**

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse.  
**Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.**

Pour les propositions 1 à 4, on munit l'espace d'un repère orthonormé et on considère :

- les points  $A(1 ; 1 ; 0)$ ,  $B(3 ; 0 ; -1)$ ,  $C(7 ; 1 ; -2)$  et  $D(5 ; 1 ; 0)$ ,
- la droite  $d$  dont une représentation paramétrique est : 
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

**Proposition 1 :**

Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.

**Proposition 2 :**

Une représentation paramétrique de la droite  $(AB)$  est : 
$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

**Proposition 3 :**

Les droites  $d$  et  $(AB)$  sont sécantes.

**Proposition 4 :**

Les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont coplanaires.

Pour la proposition 5, on considère :

- un tétraèdre  $ABCD$ ,
- le point  $I$  tel que  $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$  et le point  $J$  tel que  $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ .

**Proposition 5 :**

$(IJ)$  et  $(AB)$  sont sécantes.

**EXERCICE 2**

Soit les fonctions  $g$  et  $f$  définis sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$g(x) = 2 - \ln(x^2)$$

$$f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x}$$

1.
  - a. Déterminer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
  - b. Résoudre l'équation  $g(x) = 0$ .
  - c. Montrer que  $g(x)$  est strictement positif sur  $] - e; 0[ \cup ] 0; e[$ .
  - d. Établir le tableau de variations complet de  $g$ .
  - e. Étudier la convexité de  $g$ .
  
2.
  - a. Déterminer les limites de  $f$  en  $0$ ,  $-\infty$  et  $+\infty$ .
  - b. Déterminer le signe de  $f(x)$ .
  - c. Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
  - d. Établir le tableau de variations complet de  $f$ .
  - e. Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = b$  en fonction de la valeur du réel  $b$ .
  
3. Soit  $\mathcal{C}_g$  la courbe représentative de la fonction  $g$ .  
Soit  $T$  la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse 1.
  - a. Déterminer l'équation de la droite  $T$ .
  - b. Étudiez les positions relatives de  $T$  et  $\mathcal{C}_g$  sur  $]0; +\infty[$ .

**EXERCICE BONUS (optionnel)** Un individu, atteint de logorrhée, parle sans arrêt avec un certain niveau sonore. Combien faut-il de personnes parlant simultanément pour doubler ce niveau sonore ?