Correction DS07

Géométrie dans l'espace
Fontion logarithme népérien

Durée de l'épreuve : **1h55**

Exercice 1

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse.
Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Pour les propositions 1 à 4, on munit l'espace d'un repère orthonormé et on considère :

- les points $A(1\ ;\ 1;\ 0)$, $B(3\ ;0\ ;\ -1)$, $C(7\ ;1\ ;\ -2)$ et $D(5\ ;1\ ;\ 0)$,
- la droite d dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Proposition 1 : Faux

Les points A, B et C sont alignés.

On calcule les coordonnées de deux vecteurs : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

On vérifie si leurs coordonnées sont proportionnelles : $\dfrac{6}{2} \neq \dfrac{0}{1}$

On conclut : les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

Proposition 2 : Vrai

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Soit d' la droite correspondante à la représentation paramétrique donnée.

D'après la représentation paramétrique donnée, le vecteur $\vec{u}\,(-2;\ 1;\ 1)$ est un vecteur directeur de d', or $\vec{u} = -\overrightarrow{AB}$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires et les droite d et d' sont parallèles.

Vérifions si le point A appartient à la droite d' en testant la cohérence du système avec ses coordonnées :

$\begin{cases} 1 = 5 - 2t \\ 1 = -1 + t \\ 0 = -2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$ le système est cohérent donc A appartient à la droite d'

d' est parallèle à (AB) et A appartient à d' donc d' et (AB) sont la même droite.

NB : attention, la représentation paramétrique d'une droite n'est pas unique ...

Proposition 3 : FAUX

Les droites d et (AB) sont sécantes.

Si les droites sont sécantes alors les coordonnées de leur point d'intersection vérifient les représentations paramétriques des deux droites, on essaie donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} 2t = 5 - 2t' \\ 1 + t = -1 + t' \\ -5 + 3t = -2 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 2 + 2t = 5 - 2 \\ 1 + t = -1 + t' \\ -5 + 3t = -2 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{4} \\ t' = 2 + t = \dfrac{9}{4} \\ -5 + 3t = -2 + t' \end{cases}$$

On vérifie la cohérence avec la troisième équation :
$-5 + 3 \times \dfrac{1}{4} = -5 + \dfrac{3}{4} = -\dfrac{17}{4}$ et $-2 + \dfrac{9}{4} = \dfrac{1}{4}$

Le système n'est cohérent et donc (AB) et d ne sont pas sécantes.

NB : attention, à ne pas prendre la même variable pour les deux représentations paramétriques ...

Proposition 4 : FAUX

Les point A, B, C et D sont coplanaires.

On vérifie si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont linéairement indépendants en résolvant l'équation :

$$a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC} + c\,\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{O} \iff \begin{cases} 2a + 6b + 4c = 0 \\ -a = 0 \\ -a - 2b = 0' \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont linéairement indépendants et donc les point A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

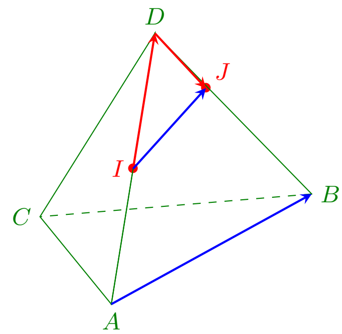
Pour la proposition 5, on considère :

- un tétraèdre $ABCD$,
- le point I tel que $\overrightarrow{DI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ et le point J tel que $\overrightarrow{DJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.

Proposition 5 : VRAI

(IJ) et (AB) sont sécantes.

On décompose sur la même base :
$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}$
$\overrightarrow{AB} = 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right)$



Les coefficients ne sont pas proportionnels donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires.

Par ailleurs (IJ) et (AB) sont coplanaires car A, B, J et D appartiennent au plan (ABD) par construction.

Donc les droites (IJ) et (AB) sont sécantes.

Exercice 2

Soit les fonctions g et f définis sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = 2 - ln\left(x^2\right)$$

$$f(x) = \frac{ln\left(x^2\right)}{x}$$

1. **a.** Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} ln(X) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} ln(x^2) = +\infty \text{ par combinaison } \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

par produit et par somme

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} ln(X) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} ln(x^2) = -\infty \text{ par combinaison } \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

par produit et par somme

b. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

$g(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; ln(x^2) = 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 = e^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - e^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-e)(x+e) = 0$

$S = \{-e\,;\, e\}$

c. Montrer que $g(x)$ est strictement positif sur $]-e;0[\cup]0;e[$.

$g(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; (x-e)(x+e) > 0$

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

car $a = 1 > 0$

d. Établir le tableau de variations complet de g.

La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée :

$$g'(x) = -\left(ln(x^2)\right)' = -\frac{\left(x^2\right)'}{x^2} = -\frac{2x}{x^2} = -\frac{2}{x}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	$-\infty$

e. Étudier la convexité de g.

On étudie le signe de la dérivée seconde de g :

$g"(x) = \dfrac{2}{x^2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

Donc g est convexe sur $]-\infty\,;\,0[$ et g est convexe sur $]0\,;\,+\infty[$

2. **a.** Déterminer les limites de f en 0, $-\infty$ et $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} x^2 = 0^+\\ \lim\limits_{\substack{X\to 0\\x>0}} ln(X) = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} ln(x^2) = -\infty \text{ par combinaison } \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = +\infty \text{ par quotient}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2 = 0^+\\ \lim\limits_{\substack{X\to 0\\x>0}} ln(X) = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} ln(x^2) = -\infty \text{ par combinaison } \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = -\infty \text{ par quotient}$$

$$f(x) = \frac{2\times ln(|x|)}{x} = \begin{cases} 2\times\dfrac{ln(x)}{x} \text{ si } x>0\\ (-2)\times\dfrac{ln(-x)}{-x} \text{ si } x<0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to -\infty} -x = +\infty\\ \lim\limits_{X\to +\infty} \dfrac{ln(X)}{X} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{ln(-x)}{-x} = 0 \text{ par combinaison } \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \text{ par produit}$$

par croissance comparée

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par croissance comparée et produit

b. Déterminer le signe de $f(x)$.

$ln(x^2) > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0$

$S =]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$ car $a = 1 > 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$ln(x^2)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	

c. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{(ln(x^2))'\times x - ln(x^2)\times(x)'}{x^2} = \frac{\frac{2}{x}\times x - ln(x^2)\times 1}{x^2} = \frac{2-ln(x^2)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

d. Établir le tableau de variations complet de f.

$x^2 > 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ qui a été étudié à la question 1.c.

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-2e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$2e^{-1}$	$\searrow$	0

e. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = b$ en fonction de la valeur du réel b.

f étant continue et monotone sur les intervalles $]-\infty\,;\,-e[$, $]-e\,;\,0[$, $]0\,;\,e[$ et $]e\,;\,+\infty[$; on applique le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires sur chacun de ces intervalles.

- $b\in\{0;\,-2e^{-1};\,2e^{-1}\}$: 2 solutions ;
- $b\in]-\infty\,;\,-2e^{-1}[\,\cup\,]2e^{-1}\,;\,+\infty[$: 1 solution ;
- $b\in]-2e^{-1}\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,2e^{-1}[$: 3 solutions.

3. Soit $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g.

Soit T la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.

a. Déterminer l'équation de la droite T.

$$\begin{aligned} T: \quad y &= g'(1)(x-1)+g(1) \\ &= -2(x-1)+2 \\ &= -2x+4 \end{aligned}$$

b. Étudiez les positions relatives de T et $\mathscr{C}_g$ sur $]0;+\infty[$.

On a montré en 1.e. que g est convexe sur $]0;+\infty[$, donc T est en-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]0;+\infty[$.

